



ریاضی عمومی 1

حد و پیوستگی

مشتق و کاربردها

دیفرانسیل

انتگرال و کاربردها

موسوی

دانشگاه فنی مهندسی

شیراز

حد نامتناهی

تعریف :

۱: وقتی می نویسیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ یعنی می توانیم با نزدیک کردن متغیر x به عدد a (به قدر کافی) ، مقادیر

$f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواهی بزرگتر کنیم. در این حالت گوییم وقتی x به a میل می کند، $f(x)$ به $+\infty$ میل

می کند.

۲: وقتی می نویسیم $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ یعنی می توانیم با نزدیک کردن متغیر x به عدد a (به قدر کافی) ، مقادیر

$f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواهی کوچکتر کنیم. در این حالت گوییم وقتی x به a میل می کند، $f(x)$ به $-\infty$ میل

می کند.

توجه : در حالتی که تابع کسری باشد و مخرج آن به سمت صفر میل کند. توجه به علامت صورت و مخرج مهم است.

$$۱) \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{[x] - 4}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3 - 4}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-1}{x - 4} = \frac{-1}{-} = +\infty$$

$$۲) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{1 - \cos x}}{\frac{x}{1 - \cos x}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{\sin x}{x}}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$۳) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 1}{4 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 1}{(2 + x)(2 - x)} = \frac{1}{4(0^+)} = +\infty$$

$$۴) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 3x - 4} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + x + 1}{(x + 4)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{5(0^-)} = -\infty$$

$$۵) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{[x] - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{1 - 1} = \frac{2}{0} = \text{نامعین}$$

حد در بی نهایت

۱) فرض کنیم تابع f در بازه $(c, +\infty)$ تعریف شده باشد. اگر هنگامی که متغیر x به $+\infty$ میل می کند، مقادیر $f(x)$ به عدد L میل کنند. آنگاه گوییم حد در بی نهایت تابع f برابر L است و می نویسیم.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

۲) فرض کنیم تابع f در بازه $(-\infty, c)$ تعریف شده باشد. اگر هنگامی که متغیر x به $-\infty$ میل می کند، مقادیر $f(x)$ به عدد L میل کنند. آنگاه گوییم حد در بی نهایت تابع f برابر L است و می نویسیم.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

قضیه: (قاعده ی جمله ی پرتوان) حد یک عبارت جبری مانند $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ با حد جمله ای از آن برابر است که بیشترین توان را داشته باشد.

اثبات:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n \left(\frac{a_n x^n}{a_n x^n} + \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{a_n x^n} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_0}{a_n x^n} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n (1 + 0 + \dots + 0) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

الف) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4x + 1}{-x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{-1} = -3$

ب) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 1}{x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = \frac{3}{+\infty} = 0$

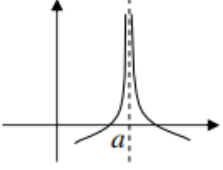
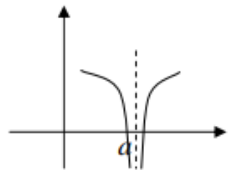
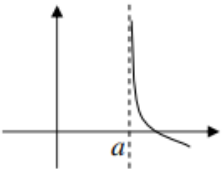
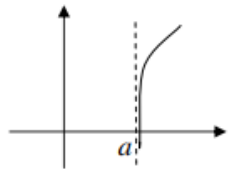
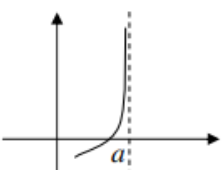
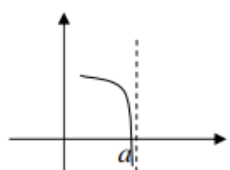
ج) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2 + 5x + 1}{3x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{3} = \frac{-4}{3}(-\infty) = +\infty$

نتیجه: بنا بر قاعده ی جمله ی پرتوان، می توان برای حد های توابع کسری وقتی که $x \rightarrow \pm\infty$ نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_n x^m + b_{n-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_n x^n}{b_n x^m} = \begin{cases} 0 & n < m \\ \frac{a}{b} & n = m \\ \infty & n > m \end{cases}$$

مجانِب قائم

فرض كنيد كه a يك عدد حقيقي باشد، آنگاه خط $x = a$ را مجانب قائم نمودار تابع f مي گوييم، هرگاه يكي از حالت هاي زير برقرار باشد.

$۱) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ 	$۲) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ 
$۳) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ 	$۴) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ 
$۵) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ 	$۶) \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$ 

براي محاسبه ي مجانب قائم در توابع كسري، مخرج كسر را مساوي صفر قرار مي دهيم، ريشه هاي مخرج مجانب قائم تابع f هستند، به شرط اينكه اين ريشه ها، صورت را صفر نكنند.

مجانِب قائم توابع زير را بدست آوريد:

$$۱) f(x) = \frac{x^3 - 2x + 2}{x^3 - 8}$$

$$۲) f(x) = \frac{x^3 - 2x + 1}{x^3 - x}$$

$$۳) f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{x^3 - 4}$$

حل ۱:

$$x^3 - 8 = 0 \rightarrow x = 2$$

خط $x = 2$ مجانب قائم است.

حل ۲:

$$x^3 - x = 0 \rightarrow x(x-1) = 0 \rightarrow x = 0, x = 1$$

خط $x = 0$ مجانب قائم است ولي خط $x = 1$ مجانب قائم نيست، چون ريشه ي صورت نيز مي باشد.

حل ۳:

$$D_f = [1, +\infty) - \{2\}$$

$$x^3 - 4 = 0 \rightarrow x = 2, x = -2$$

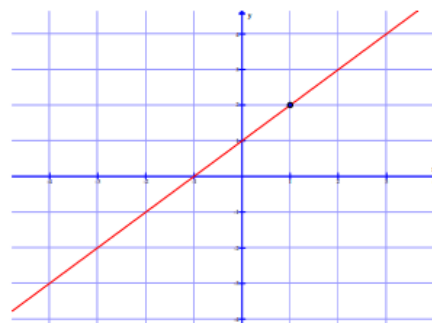
خط $x = 2$ مجانب قائم است ولي خط $x = -2$ مجانب قائم نيست، چون تابع در همسايگي اين عدد تعريف نشده است.

مثال (۱)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$f(1) = 2$$

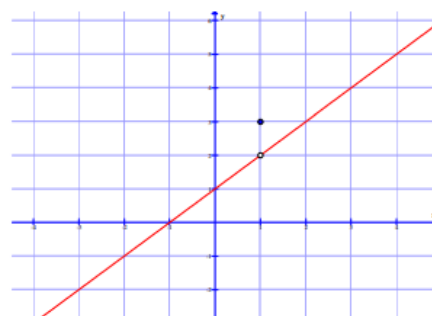


مثال (۲)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ 3 & x = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$f(1) = 3$$



تعریف: فرض کنید تابع f در نقطه a و در یک همسایگی چپ یا راست و یا یک همسایگی a (دوطرفه) تعریف

شده باشد. اگر حد تابع در a موجود و برابر مقدار تابع باشد ($\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$)، آنگاه گوییم تابع f در نقطه a

پیوسته است.^۱

تمرین: پیوستگی تابع زیر را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} & x \neq 2 \\ [1 - x] & x = 2 \end{cases}$$

حل: تابع f در $x = 2$ و در همسایگی دو طرفه $x = 2$ تعریف شده است. پس:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 3) = 2 - 3 = -1$$

$$f(2) = [1 - 2] = [-1] = -1$$

پس $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ لذا تابع در $x = 2$ پیوسته است.

تمرین: نشان دهید که تابع زیر در نقطه $x = 2$ ناپیوستگی اساسی دارد.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - 2}{|x - 2|} & x \neq 2 \\ x & x = 2 \end{cases}$$

حل: کافی است که نشان دهیم تابع در نقطه $x = 2$ داده شده حد ندارد.

$$\text{حد راست} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{x - 2} = 1$$

$$\text{حد چپ} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{|x - 2|} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{-(x - 2)} = -1$$

تعریف ۱: فرض کنید f یک تابع و $a \in D_f$ ، اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ موجود باشد، می‌گوییم تابع f در نقطه a مشتق‌پذیر است و مقدار این حد را با نماد $f'(a)$ نمایش می‌دهیم و آن را مشتق تابع f در نقطه a می‌نامیم.

تذکر: عبارت‌های زیر معادل‌های دیگری برای تعریف مشتق تابع f در نقطه a می‌باشند.

$$۱) f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$۲) f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

مثال ۱: مشتق تابع $f(x) = x^2$ را در نقطه $x = 3$ ، در صورت وجود به‌دست آورید.

حل: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{0}{0}$ (مبهم)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6 \rightarrow f'(3) = 6$$

مثال ۲: مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطه $x = 4$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

حل: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \frac{0}{0}$ (مبهم)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} \times \frac{\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} + 2} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{\sqrt{x} + 2} = \frac{1}{4} \rightarrow f'(4) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

مثال ۴: مشتق تابع $f(x) = |x|$ را در نقطه $x = 0$ در صورت وجود به‌دست آورید.

حل: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = ?$

$$\left. \begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 = 1 \\ L' &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \end{aligned} \right\} \rightarrow L \neq L'$$

تمرین

۱- با استفاده از تعریف مشتق، مشتق توابع زیر را در نقطه داده شده به‌دست آورید.

۱) $f(x) = 5$ ، $x = 2$ ۲) $f(x) = 3x + 2$ ، $x = 1$

مشتق پذیری - پیوستگی

تعریف ۲: هرگاه f یک تابع و $a \in D_f$ ، مشتق چپ و مشتق راست تابع f در نقطه $x = a$ به صورت زیر تعریف و نمایش داده می شود.

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (\text{مشتق چپ})$$

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (\text{مشتق راست})$$

مثال ۵: برای تابع $f(x) = |x|$ با توجه به محاسبات مثال ۴ داریم:

$$f'_+(\cdot) = 1, f'_-(\cdot) = -1 \text{ و چون } f'_-(\cdot) \neq f'_+(\cdot) \text{ پس } f'(\cdot) \text{ موجود نیست.}$$

تفسیر: اگر تابع f در $x = a$ مشتق پذیر باشد آنگاه در این نقطه پیوسته نیز است.

مثال ۶: مشتق پذیری تابع $f(x) = [x]$ را در نقطه $x = 2$ بررسی کنید.

حل: چون این تابع در نقطه $x = 2$ ناپیوسته است پس در این نقطه مشتق هم ندارد.

مثال ۷: مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x & x \geq 1 \\ 4x - 2 & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

حل: ابتدا پیوستگی تابع f در نقطه $x = 1$ را بررسی می کنیم. داریم:

$$f(1) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x^2 - x) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (4x - 2) = 2$$

با توجه به تعریف پیوستگی، تابع در نقطه $x = 1$ پیوسته نیست. بنابراین تابع در نقطه $x = 1$ مشتق ندارد.

تمرین

مثال ۸: مشتق پذیری تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 1 \\ 2x + 1 & x < 1 \end{cases}$ را در نقطه $x = 1$ بررسی کنید.

مثال ۹: مقادیر a و b را طوری بیابید که تابع $f(x) = \begin{cases} ax + b & x < 2 \\ x^2 & x \geq 2 \end{cases}$ در نقطه $x = 2$ مشتق پذیر باشد.

قضیه ۱: فرض کنید c و n مقادیر حقیقی و ثابت و توابع g و h در نقطه x مشتق پذیر باشند، آنگاه داریم:

$$۱) f(x) = c \rightarrow f'(x) = 0$$

$$۲) f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$$

$$۳) f(x) = cg(x) \rightarrow f'(x) = cg'(x)$$

$$۴) f(x) = g(x) \pm h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

$$۵) f(x) = g(x)h(x) \rightarrow f'(x) = g'(x)h(x) + h'(x)g(x)$$

$$۶) f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - h'(x)g(x)}{h^2(x)} \quad (h(x) \neq 0)$$

مثال ۴: مشتق توابع زیر به کمک قضیه ۱ محاسبه شده است.

$$۱) f(x) = 5 \rightarrow f'(x) = 0$$

$$۲) f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x^{2-1} = 2x$$

$$۳) f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \rightarrow f'(x) = (-1)x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$۴) f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$۵) f(x) = 5x^2 \rightarrow f'(x) = 5(x^2)' = 5(2x) = 10x$$

$$۶) f(x) = \sqrt{x} + x^2 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x$$

$$۷) f(x) = x^2 - 2x^2 + 3x \rightarrow f'(x) = 2x - 4x + 3$$

$$۸) f(x) = (\sqrt{x} + 1)(x^2 + 3x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + 3x) + (\sqrt{x} + 1)(2x + 3)$$

$$۹) f(x) = \frac{2x+1}{5x-2} \rightarrow f'(x) = \frac{2(5x-2) - 5(2x+1)}{(5x-2)^2} = \frac{-11}{(5x-2)^2}$$

تمرین

مشتق توابع زیر را به کمک قوانین مشتق به دست آورید.

$$۱) f(x) = \frac{1}{x^4} - x^4$$

$$۲) v(r) = \frac{\pi}{r} \pi r^2$$

$$۳) s(r) = \frac{1}{r}(\pi r^2 + 1 \cdot \pi r)$$

$$۴) f(x) = \frac{x^4}{r} + \frac{r}{x^2}$$

$$۵) g(h) = \frac{2h-2}{h+2}$$

$$۶) g(x) = \frac{x^2+2x-1}{2x+2}$$

$$۱) f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$۲) f(x) = \cos x \rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$۳) f(x) = \tan x \rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2 x$$

$$۴) f(x) = \cot x \rightarrow f'(x) = -(1 + \cot^2 x)$$

$$۵) f(x) = \sec x \rightarrow f'(x) = \sec x \tan x$$

$$۶) f(x) = \csc x \rightarrow f'(x) = -\csc x \cot x$$

مثال ۶: مشتق توابع زیر به کمک قوانین مشتق محاسبه شده است.

$$۱) f(x) = 5 \sin x + 3 \cos x \rightarrow f'(x) = 5 \cos x - 3 \sin x$$

$$۲) f(x) = x^2 \sec x \rightarrow f'(x) = 2x \sec x + x^2 \sec x \tan x$$

$$۳) f(x) = \sin x \tan x$$

$$f'(x) = \cos x \tan x + \sin x (1 + \tan^2 x) = \sin x (2 + \tan^2 x)$$

$$۴) f(x) = \frac{\cos x}{1 - \sin x} \rightarrow f'(x) = \frac{(-\sin x)(1 - \sin x) - \cos x(-\cos x)}{(1 - \sin x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{1 - \sin x}{(1 - \sin x)^2} = \frac{1}{1 - \sin x}$$

تمرین

$$۷) f(x) = (x^2 - 5x)(x^3 - 4x + 1) \quad ۸) f(x) = x^2 \cot x$$

$$۹) g(x) = 3 \cos x - x \sin x \quad ۱۰) g(t) = t^2 \sec t$$

$$۱۱) h(z) = \frac{\sin z - 1}{\cos z + 1} \quad ۱۲) g(z) = \frac{2 \sin z}{2 + z}$$

قضیه ۳: مشتق توابع معکوس مثلثاتی به صورت زیر می باشد^(۱).

$$۱) f(x) = \sin^{-1} x = \text{Arc sin } x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$۲) f(x) = \cos^{-1} x = \text{Arc cos } x \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$۳) f(x) = \tan^{-1} x = \text{Arc tan } x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$۴) f(x) = \cot^{-1} x = \text{Arc cot } x \rightarrow f'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$$

مثال ۷: مشتق توابع زیر به کمک قضیه های قبل محاسبه شده است.

$$۱) f(x) = ۴ \sin^{-1} x + ۳ \cos^{-1} x \rightarrow f'(x) = \frac{۴}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{۳}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$۲) f(x) = \tan^{-1} x + \cot^{-1} x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} = 0$$

$$۳) f(x) = x^2 \sin^{-1} x \rightarrow f'(x) = 2x \sin^{-1} x + x^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

قضیه ۴: مشتق توابع نمایی و لگاریتمی به صورت زیر می باشد. ($a \neq 1$ و $a > 0$)

$$۱) f(x) = a^x \rightarrow f'(x) = (\ln a) a^x$$

$$۲) f(x) = \log_a x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{(\ln a)x} \quad (x > 0)$$

چون $\ln e = 1$ ، پس برای $a = e$ فرمول های فوق به صورت زیر می باشد.

$$۳) f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$$

$$۴) f(x) = \ln x \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$$

مثال ۸: مشتق توابع زیر به کمک قضیه های قبل محاسبه شده است.

$$۱) f(x) = e^x \sin x$$

$$f'(x) = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x (\sin x + \cos x)$$

$$۲) f(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x} \rightarrow f'(x) = \frac{(0)e^x - (1)e^x}{(e^x)^2} = \frac{-e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}$$

$$۳) f(x) = \frac{r^x}{x} \rightarrow f'(x) = \frac{(\ln r)r^x x - r^x}{x^2} = \frac{r^x(x(\ln r) - 1)}{x^2}$$

$$۴) f(x) = x \log_r x$$

$$f'(x) = (1) \log_r x + (x) \frac{1}{(\ln r)x} = \frac{\ln x}{\ln r} + \frac{1}{\ln r} = \frac{(\ln x) + 1}{\ln r} = \frac{1 + \ln x}{\ln r}$$

قضیه ۶ (قضیه مشتق تابع مرکب یا قاعده زنجیره‌ای): هرگاه f و g توابعی مشتق پذیر باشند، مشتق تابع مرکب $f \circ g$ نسبت به x ، با فرض $u = g(x)$ و $y = f \circ g(x) = f(u)$

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{dx}}$$

به صورت مقابل محاسبه می‌شود.

لگنه ۱: مشتق تابع مرکب $f \circ g$ را به صورت‌های زیر نیز نمایش می‌دهند.

$$y = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x) f'(g(x))$$

$$y = f(u) \rightarrow y' = u' f'(u)$$

مثال ۱۰: اگر $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2 + 5x$ مشتق تابع $f \circ g(x)$ را بیابید.

$$y = f \circ g(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{u} = f(u) \quad \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 5x \\ \frac{du}{dx} = 2x + 5 \end{array} \right. \quad \text{حل:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} (2x + 5) = \frac{2x+5}{2\sqrt{x^2+5x}}$$

مثال ۱۱: اگر $f(x) = x^3$ مشتق تابع $y = f(\sin x)$ را به دست آورید.

$$y = f(\sin x) = (\sin x)^3 = u^3 = f(u) \quad \left| \begin{array}{l} u = \sin x \\ \frac{du}{dx} = \cos x \end{array} \right. \quad \text{حل:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{dx} = 3u^2 \cos x = 3 \sin^2 x \cos x$$

مثال ۱۲: اگر $f'(x) = \frac{1}{x}$ مشتق تابع $y = f(x^2 + 1)$ را به دست آورید.

$$y = f(x^2 + 1) = f(u) \quad \left| \begin{array}{l} u = x^2 + 1 \\ \frac{du}{dx} = 2x \end{array} \right. \quad \text{حل:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{dx} = f'(u) \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} (2x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+1}$$

مثال ۱۳: مشتق تابع $y = \sin 5x$ را به دست آورید.

حل: با فرض $f(x) = \sin x$ و $u = 5x$ ، داریم:

$$y = \sin 5x = \sin u = f(u) \quad \left| \begin{array}{l} u = 5x \\ \frac{du}{dx} = 5 \end{array} \right.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df(u)}{du} \frac{du}{dx} = (\cos u)(5) = 5 \cos 5x$$

$$\begin{aligned} ۱) \quad y &= (x^r + r x)^{\Delta} \rightarrow y = u^{\Delta} \\ y' &= \Delta u' u^r = \Delta(r x + r)(x^r + r x)^r \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} u = x^r + r x \\ u' = r x + r \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} ۲) \quad y &= \sin \sqrt{x} \rightarrow y = \sin u \\ y' &= u' \cos u = \frac{1}{r \sqrt{x}} \cos \sqrt{x} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{x} \\ u' = \frac{1}{r \sqrt{x}} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} ۳) \quad y &= \cos^r x \rightarrow y = u^r \\ y' &= r u' u^{r-1} = -r \sin x \cos^{r-1} x \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} u = \cos x \\ u' = -\sin x \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} ۴) \quad y &= \sqrt{x^r + 1} \rightarrow y = \sqrt{u} \\ y' &= \frac{u'}{r \sqrt{u}} = \frac{r x}{r \sqrt{x^r + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^r + 1}} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} u = x^r + 1 \\ u' = r x \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \Delta) \quad y &= e^{\sin x} \rightarrow y = e^u \\ y' &= u' e^u = \cos x e^{\sin x} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} u = \sin x \\ u' = \cos x \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} ۶) \quad y &= \ln(x^r - r) \rightarrow y = \ln u \\ y' &= \frac{u'}{u} = \frac{r x}{x^r - r} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} u = x^r - r \\ u' = r x \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} ۷) \quad y &= \log_r(e^x + x) \rightarrow y = \log_r u \\ y' &= \frac{u'}{(\ln r) u} = \frac{e^x + 1}{(\ln r)(e^x + x)} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} u = e^x + x \\ u' = e^x + 1 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} ۸) \quad y &= \sin^{-1}(e^x + r x) \rightarrow y = \sin^{-1} u \\ y' &= \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{e^x + r}{\sqrt{1-(e^x + r x)^2}} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} u = e^x + r x \\ u' = e^x + r \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} ۱۱) \quad y &= \sin^{\Delta}(x^r + r) \rightarrow y = u^{\Delta} \\ y' &= \Delta u' u^r \\ &= \Delta(r x \cos(x^r + r))(\sin(x^r + r))^r \\ &= 1 \cdot x \cos(x^r + r) \sin^r(x^r + r) \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} u = \sin(x^r + r) = \sin v \\ u' = v' \cos v \\ u' = r x \cos(x^r + r) \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} v = x^r + r \\ v' = r x \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} ۱۲) \quad y &= \ln(e^{\sqrt{x}} + r) \rightarrow y = \ln u \\ y' &= \frac{u'}{u} = \frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{r \sqrt{x}}}{e^{\sqrt{x}} + r} \\ &= \frac{e^{\sqrt{x}}}{r \sqrt{x}(e^{\sqrt{x}} + r)} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} u = e^{\sqrt{x}} + r = e^v + r \\ u' = v' e^v \\ u' = \frac{1}{r \sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \end{array} \right. \quad \left| \begin{array}{l} v = \sqrt{x} \\ v' = \frac{1}{r \sqrt{x}} \end{array} \right.$$

۳-۳ مشتق مراتب بالاتر، مشتق گیری ضمنی، لگاریتمی و پارامتری

مثال ۱: مشتق مرتبه های مختلف تابع $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 15$ به صورت زیر است:

$$f'(x) = 8x^3 - 6x, \quad f''(x) = 24x^2 - 6, \quad f'''(x) = 48x$$

$$f^{(4)}(x) = 48, \quad f^{(n)}(x) = 0 \quad (n \geq 5)$$

تمرین: مشتق مراتب اول تا چهارم تابع $\cos x$ را بدست آورید

توابع ضمنی و مشتق آنها

(۱) y به طور صریح بر حسب x بیان نشده است، مانند:

$$x^2 + y^2 = 6xy, \quad \ln(x^2 + y) = 2xy, \quad xy = 1, \quad x^2 + y^2 = 4$$

این نوع رابطه ها ممکن است تابع نباشند ولی می توان آنها را به صورت اجتماع چند تابع

(توابع صریح) در نظر گرفت. این نوع رابطه ها را تابع ضمنی می گویند.

روش دوم مشتق گیری ضمنی: ابتدا تابع ضمنی را به صورت $F(x, y) = 0$

می نویسیم. برای محاسبه $\frac{dy}{dx}$ ، در عبارت $F(x, y)$ یک بار y را ثابت فرض کرده و

مشتق F نسبت به x را محاسبه می کنیم و آن را با F_x نمایش می دهیم، بار دیگر x را

ثابت فرض کرده و مشتق F نسبت به y را محاسبه می کنیم و آن را با F_y نمایش

$$\boxed{y' = -\frac{F_x}{F_y}} \quad \text{می دهیم. آنگاه } y' \text{ را از فرمول مقابل می توان به دست آورد.}$$

$$۱) x^2 + y^2 = 4 \rightarrow F(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$$

$$F_x = \frac{dF}{dx} = 2x, \quad F_y = \frac{dF}{dy} = 2y$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

$$۲) x^2 y^2 = 4x \rightarrow F(x, y) = x^2 y^2 - 4x = 0$$

$$F_x = \frac{dF}{dx} = 2xy^2 - 4, \quad F_y = \frac{dF}{dy} = 2x^2 y$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2xy^2 - 4}{2x^2 y} = \frac{4 - 2xy^2}{2x^2 y}$$

$$۳) y - \sin(2x + y^2) = 5 \rightarrow F(x, y) = y - \sin(2x + y^2) - 5 = 0$$

$$F_x = \frac{dF}{dx} = -2 \cos(2x + y^2), \quad F_y = \frac{dF}{dy} = 1 - 2y \cos(2x + y^2)$$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-2 \cos(2x + y^2)}{1 - 2y \cos(2x + y^2)} = \frac{2 \cos(2x + y^2)}{1 - 2y \cos(2x + y^2)}$$

۴) مشتق‌گیری پارامتری

وقتی مسیر حرکت یک متحرک در صفحه تابع نباشد نمی‌توان با بیان مستقیم y بر حسب x ، مسیر را توصیف کرد. این مطلب یکی از دلایلی می‌باشد که برای توصیف مسیر حرکت یک متحرک در صفحه، نمایش دیگری را وضع کرده‌اند و آن اینکه مختصات متحرک را با دو معادله مانند معادلات زیر، به صورت توابعی از متغیر سومی مانند t

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad \text{می‌نویسند:}$$

مثال ۱۴: در تابع پارامتری $y = t^2 + 5$ و $x = 2t + 1$ ، از دو روش $\frac{dy}{dx}$ را محاسبه

$$\left(\frac{dx}{dt} = 2, \frac{dy}{dt} = 2t \right) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{2} = t \quad \text{روش دوم:}$$

چون $t = \frac{1}{2}(x - 1)$ ، بنابراین از هر دو روش، نتیجه یکسانی حاصل شد.

مثال ۱۵: در تابع پارامتری $x = t^2 + 2t$ و $y = \sqrt{t+1}$ مقدار $\frac{dy}{dx}$ را در نقطه نظیر $t = 3$ محاسبه کنید.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t+1}}}{2t+2} = \frac{1}{4(t+1)\sqrt{t+1}}$$

حل:

$$t = 3 \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{4 \times 4 \times 2} = \frac{1}{32}$$

مثال ۱۶: در تابع پارامتری $y = \frac{1}{t}$ و $x = t^2 + 1$ ، مقدار $\frac{d^2y}{dx^2}$ را محاسبه کنید.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{-\frac{1}{t^2}}{2t} = \frac{-1}{2t^3} = -\frac{1}{2}t^{-3}$$

حل:

$$\frac{dy'}{dt} = -\frac{1}{2}(-3t^{-4}) = \frac{3}{2}t^{-4}$$

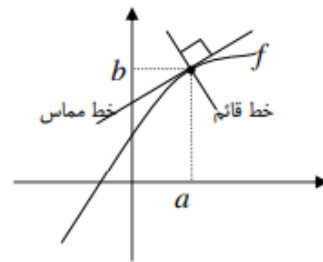
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2}t^{-4}}{2t} = \frac{3}{4t^5}$$

خط مماس و خط قائم بر منحنی از نقطه ی روی منحنی

بنابر آنچه که در تعریف مشتق دیدیم، در صورتی که تابع f در نقطه ی (a, b) مشتق پذیر باشد، در این نقطه دارای خط

مماس است. شیب و معادله ی خط مماس بر منحنی تابع f در این نقطه

به شکل زیر است.



$$m = f'(a) \text{ شیب خط مماس}$$

$$y = m(x - a) + b \text{ معادله ی خط مماس}$$

همچنین خط قائم بر منحنی تابع f در نقطه ی (a, b) ، خطی است که

در همین نقطه بر خط مماس، عمود شود. پس:

$$m' = -\frac{1}{m} \text{ شیب خط قائم}$$

$$y = m'(x - a) + b \text{ معادله ی خط قائم}$$

مثال: معادلات خط های مماس و قائم بر منحنی $f(x) = \sqrt{x}$ در نقطه ی $(1, 1)$ را بیابید.

حل:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$m = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{(1)}} = \frac{1}{2} \text{ شیب خط مماس}$$

$$m' = -\frac{1}{m} = -2 \text{ شیب خط قائم}$$

$$y = m(x - a) + b \rightarrow y = \frac{1}{2}(x - 1) + 1 \rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \text{ معادله ی خط مماس}$$

$$y = m'(x - a) + b \rightarrow y = -2(x - 1) + 1 \rightarrow y = -2x + 3 \text{ معادله ی خط قائم}$$

۲: آیا تابع های زیر در نقطه ی مشخص شده خط مماس دارند؟ اگر پاسخ مثبت است، معادله ی خط مماس را بنویسید؟

$$g(x) = |\sin x| \text{ در } x = 0$$

$$f(x) = \sin x \text{ در } x = 0$$

حل الف: تابع f در $x = 0$ پیوسته است و

$$f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$$

پس f در $x = 0$ مشتق پذیر است. در نتیجه:

$$f(x) = \sin x \rightarrow f(\cdot) = \sin(\cdot) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \rightarrow f'(\cdot) = \cos(\cdot) = 1$$

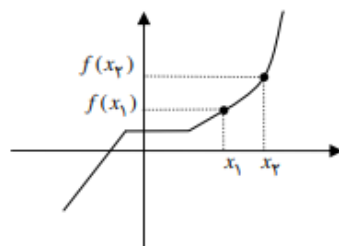
$$m = f'(\cdot) = 1 \text{ شیب خط مماس}$$

$$y = m(x - a) + b \rightarrow y = 1(x - 0) + 0 \rightarrow y = x \text{ معادله ی خط مماس}$$

توابع صعودی و نزولی

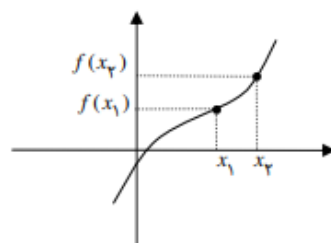
الف : تابع f روی بازه I ، صعودی است، هرگاه برای

$$\forall x_1, x_2 \in I; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



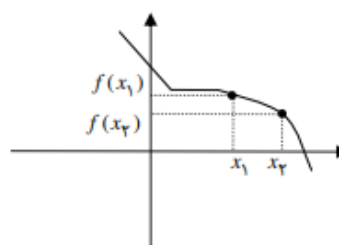
ب : تابع f روی بازه I ، اکیداً صعودی است، هرگاه برای

$$\forall x_1, x_2 \in I; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$



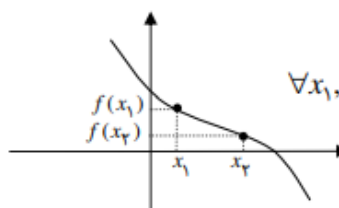
ج : تابع f روی بازه I ، نزولی است، هرگاه برای

$$\forall x_1, x_2 \in I; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$



د : تابع f روی بازه I ، اکیداً نزولی است، هرگاه برای

$$\forall x_1, x_2 \in I; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



الف : اگر به ازای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم $f'(x) > 0$ ، آنگاه تابع بر $[a, b]$ اکیداً صعودی است.

ب : اگر به ازای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم $f'(x) < 0$ ، آنگاه تابع بر $[a, b]$ اکیداً نزولی است.

ج : اگر به ازای هر $x \in (a, b)$ داشته باشیم $f'(x) = 0$ ، آنگاه تابع بر $[a, b]$ اکیداً ثابت است.

توجه ۱ : شرط استفاده از قضیه ی فوق آن است که تابع f بر بازه ی $[a, b]$ پیوسته و بر بازه ی (a, b) مشتق پذیر باشد.

توجه ۲ : برای تعیین یکتوایی یک تابع، از تابع مشتق گرفته و ریشه های مشتق را در صورت وجود به دست می آوریم.

سپس تابع مشتق را در قالب یک جدول^۱ تعیین علامت می کنیم. در هر فاصله که علامت مشتق ، مثبت بود، منحنی تابع

در آن فاصله اکیداً صعودی و در هر فاصله که علامت مشتق منفی بود، منحنی تابع در آن فاصله اکیداً نزولی است.

مثال : جدول تغییرات تابع $f(x) = x^3 - 3x + 1$ را رسم کنید.

حل :

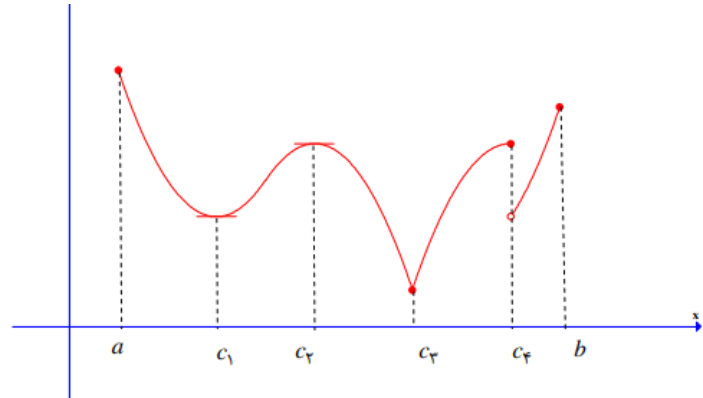
$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$+$	$-$	$+$	$+$
y	$-\infty \nearrow$	2	$-1 \searrow$	$+\infty \nearrow$

نقاط و مقدار های اکسترمم نسبی (موضعی)

تعریف : اگر تابع f روی بازه ی I تعریف شده باشد و نقطه ای مانند $c \in I$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \leq f(x)$. آنگاه گوییم تابع f در نقطه ی c مینیمم نسبی (موضعی) دارد. c را نقطه ی مینیمم نسبی و $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع می نامند.

تعریف : اگر تابع f روی بازه ی I تعریف شده باشد و نقطه ای مانند $c \in I$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$. آنگاه گوییم تابع f در نقطه ی c ماکزیمم نسبی (موضعی) دارد. c را نقطه ی ماکزیمم نسبی و $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی تابع می نامند.



الف : اگر f' روی (a, c) مثبت و روی (c, b) منفی باشد، آنگاه f در c ماکزیمم نسبی دارد.

ب : اگر f' روی (a, c) منفی و روی (c, b) مثبت باشد، آنگاه f در c مینیمم نسبی دارد.

ج : اگر f' روی (a, c) و (c, b) تغییر علامت ندهد، آنگاه f در c اکسترمم نسبی ندارد.

توجه کنید که f می تواند در $x = c$ مشتق پذیر ($f'(c) = 0$) یا مشتق ناپذیر ($f'(c)$ وجود ندارد) باشد. اما حتماً باید در این نقطه پیوستگی دو طرفه داشته باشد. در واقع با آزمون مشتق اول ، اکسترمم های نسبی پیوسته ی توابع را می توان تعیین نمود.

در این قسمت نیز می توان از جدول تغییرات تابع جهت تعیین علامت مشتق اول و تعیین نقاط اکسترمم نیز کمک گرفت.

تمرین : با رسم جدول تغییرات اکسترمم های نسبی تابع زیر را تعیین کنید.

$$f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2$$

حل :

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x \xrightarrow{f'(x)=0} 4x^3 + 4x^2 - 8x = 0$$

$$\rightarrow 4x(x^2 + x - 2) = 0 \rightarrow 4x(x+2)(x-1) = 0 \rightarrow x = -2, x = 0, x = 1$$

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	$-$	$+$	$-$	$+$	$+$
y	$+\infty$	$-\frac{32}{3}$	0	$-\frac{5}{3}$	$+\infty$
		min	max	min	

نقاط مینیمم نسبی تابع $(-2, -\frac{32}{3})$ و $(1, -\frac{5}{3})$

نقطه ی ماکزیمم نسبی تابع $(0, 0)$

۲-۲ خطا، تقریب، دیفرانسیل

فرض کنید تابع $y = f(x)$ در نقطه $x = x_0$ مشتق پذیر باشد. بنابراین داریم:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{یا} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

هرگاه مقدار Δx بسیار کوچک باشد می توان تقریب زیر را در نظر گرفت:

$$f'(x_0) \cong \frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow \boxed{\Delta y \cong f'(x_0) \Delta x}$$

همچنین می توان نوشت:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cong f'(x_0) \Delta x \rightarrow \boxed{f(x_0 + \Delta x) \cong f'(x_0) \Delta x + f(x_0)}$$

از فرمول های فوق برای محاسبه خطا و یا محاسبه مقدار تقریبی بعضی از عبارت های

عدد استفاده می شود.

مثال ۴: مقدار تقریبی $\sqrt{26}$ را بیابید.

حل: تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نظر می گیریم. داریم: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ نزدیک ترین عدد

مربع کامل به ۲۶، عدد ۲۵ می باشد. لذا با فرض $x_0 = 25$ و $\Delta x = 1$ و با استفاده از

فرمول تقریب داریم:

$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$$

$$f(25 + 1) \cong f(25) + f'(25)(1)$$

$$\sqrt{26} \cong \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}}(1) \rightarrow \sqrt{26} \cong 5 + \frac{1}{10} = 5.1$$

مثال ۵: مقدار تقریبی $\sqrt[3]{28/2}$ را بیابید.

حل: تابع $f(x) = \sqrt[3]{x}$ را در نظر می گیریم. داریم: $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ نزدیک ترین عدد

مکعب کامل به $28/2$ عدد ۲۷ می باشد. با فرض $x_0 = 27$ و $\Delta x = 1/2$ و با

استفاده از فرمول تقریب داریم:

$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0) \Delta x$$

$$f(27 + 1/2) \cong f(27) + f'(27)(1/2)$$

$$\sqrt[3]{28/2} \cong \sqrt[3]{27} + \frac{1}{3\sqrt[3]{27^2}}(1/2) \rightarrow \sqrt[3]{28/2} \cong 3 + \frac{1/2}{27} = 3 + \frac{1}{54} = 3.0185$$

این مقدار را با $\sqrt[3]{28/2} = 3.043$ که با ماشین حساب محاسبه شده مقایسه کنید.

مشاهده می کنید دقت محاسبه تا دو رقم اعشار می باشد.

مثال ۶: مقدار تقریبی $\cos 59^\circ$ را بیابید.

حل: تابع $f(x) = \cos x$ را در نظر می گیریم. داریم: $f'(x) = -\sin x$

نزدیک ترین زاویه به زاویه 59° که کسینوس آن را می شناسیم زاویه 60° می باشد. لذا فرض

می کنیم: $x_0 = 60^\circ$ و $\Delta x = -1^\circ = -\frac{\pi}{180} \text{ Rad}$. با استفاده از فرمول تقریب داریم:

$$f(x_0 + \Delta x) \cong f(x_0) + f'(x_0) \Delta x \rightarrow f(60^\circ - 1^\circ) \cong f(60^\circ) + f'(60^\circ)\left(-\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\cos 59^\circ \cong \cos 60^\circ + (-\sin 60^\circ)\left(-\frac{\pi}{180}\right) \rightarrow \cos 59^\circ \cong \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{180} = 0.5151$$

مقدار فوق با ماشین حساب معمولی محاسبه شده است. اگر عبارت $\cos 59^\circ$ را با

ماشین حساب علمی محاسبه کنیم داریم: $\cos 59^\circ = 0.5150$ ، یعنی مقدار به دست

آمده تا سه رقم اعشار صحیح می باشد.

انتگرال نامعین

هرگاه مشتق تابع $F(x)$ برابر $f(x)$ باشد. $F(x)$ را انتگرال نامعین یا به اختصار انتگرال^۱ تابع $f(x)$ می نامند و می نویسند.

$$F(x) = \int f(x) dx$$

بر این اساس می توان گفت که عمل انتگرال گیری، عکس عمل مشتق گیری می باشد.

$$\boxed{F(x)} \xrightleftharpoons[\int f(x) dx = F(x)]{F'(x) = f(x)} \boxed{f(x)}$$

مثال: اگر $f(x) = x^2$ مشتق تابع $F(x)$ باشد. به آسانی می توان گفت که $F(x)$ می تواند یکی از توابع زیر باشد.

$$F(x) = x^3$$

$$F(x) = x^3 + \frac{5}{3}$$

مثال: اگر $g(x) = -\sin x$ مشتق تابع $G(x)$ باشد. به آسانی می توان گفت که $G(x)$ می تواند به شکل زیر باشد.

$$G(x) = \cos x + c \quad c \in \mathbb{R}$$

لذا:

$$g(x) = -\sin x$$

$$\rightarrow G(x) = \int g(x) dx = \int -\sin x dx = \cos x + c$$

دسته اول قوانین انتگرال گیری: قانون های زیر به طور مستقیم از قانون های

مشتق گیری نتیجه می شود.

$$۱) \int dx = x + c$$

$$۲) \int a f(x) dx = a \int f(x) dx, \quad (a \in \mathbb{R})$$

$$۳) \int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$۴) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad (n \neq -1)$$

مثال ۴: انتگرال های زیر به کمک قوانین انتگرال گیری محاسبه شده اند.

$$۱) \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + c$$

$$۲) \int \frac{1}{y^2} dy = \int y^{-2} dy = \frac{y^{-2+1}}{-2+1} + c = \frac{y^{-2}}{-2} + c = -\frac{1}{2y^2} + c$$

$$۳) \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c$$

$$۴) \int 4z^2 dz = 4 \int z^2 dz = 4 \left(\frac{z^3}{3} \right) + c = \frac{4}{3} z^3 + c$$

$$۵) \int (2x + \frac{1}{x^2}) dx = \int 2x dx + \int \frac{1}{x^2} dx = x^2 - \frac{1}{x} + c$$

$$۶) \int (u^2 - 3u + 5) du = \int u^2 du - 3 \int u du + 5 \int du \\ = \frac{1}{3} u^3 - \frac{3}{2} u^2 + 5u + c$$

$$۷) \int \frac{x^2 + 2x^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}} dx = \int (x^{\frac{1}{2}} + 2x^{-\frac{1}{2}}) dx = \int (x^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{-1}{2}}) dx \\ = \int x^{\frac{1}{2}} dx + \int 2x^{\frac{-1}{2}} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + 2 \left(\frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} \right) + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + \frac{4}{3} \sqrt{x} + c$$

انتگرال به روش تغییر متغیر

انتگرال گیری به روش تغییر متغیر:

در اغلب اوقات با انتگرال‌هایی مواجه می‌شویم که برای ما ناآشنا هستند، روش‌هایی وجود دارد که می‌توان این انتگرال‌ها را به انتگرال‌های آشنا تبدیل و حل کرد. یکی از روش‌هایی که بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد، روش تغییر متغیر نام دارد. درستی این روش بر اساس قانون مشتق تابع مرکب می‌باشد. با ذکر چند مثال با این روش آشنا می‌شویم؛ سپس بیان سایر قوانین انتگرال‌گیری را ادامه داده و در بخش بعد چند روش دیگر انتگرال‌گیری را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۵: برای محاسبه $\int (2x - 1)^3 dx$ مراحل زیر را طی می‌کنیم.

ابتدا قرار می‌دهیم: $u = 2x - 1$ و سپس دیفرانسیل این عبارت را محاسبه می‌کنیم.

$$du = 2 dx \rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

سپس انتگرال را بر حسب متغیر u می‌نویسیم:

$$\int (2x - 1)^3 dx = \int u^3 \left(\frac{1}{2} du\right) = \frac{1}{2} \int u^3 du$$

جواب انتگرال اخیر به کمک قوانین انتگرال‌گیری به صورت زیر است:

$$\frac{1}{2} \int u^3 du = \frac{1}{2} \frac{u^4}{4} + c = \frac{1}{8} u^4 + c$$

$$\int (2x - 1)^3 dx = \frac{1}{8} (2x - 1)^4 + c$$

بنابراین داریم:

مثال ۶: برای محاسبه $\int x^2 (x^2 + 2)^5 dx$ مراحل زیر را طی می‌کنیم.

ابتدا قرار می‌دهیم: $u = x^2 + 2$ و سپس دیفرانسیل این عبارت را محاسبه می‌کنیم.

$$du = 2x dx \rightarrow x dx = \frac{1}{2} du$$

سپس انتگرال را بر حسب متغیر u می‌نویسیم:

$$\int x^2 (x^2 + 2)^5 dx = \int (x^2 + 2)^5 (x dx) = \int u^5 \left(\frac{1}{2} du\right) = \frac{1}{2} \int u^5 du$$

جواب انتگرال اخیر به کمک قوانین انتگرال‌گیری به صورت ذیل است:

$$\frac{1}{2} \int u^5 du = \frac{1}{2} \frac{u^6}{6} + c = \frac{1}{12} u^6 + c$$

$$\int x^2 (x^2 + 2)^5 dx = \frac{1}{12} (x^2 + 2)^6 + c$$

بنابراین داریم:

$$۱) \int \frac{x dx}{\sqrt{rx^r - 1}}$$

$$u = rx^r - 1 \rightarrow du = rx dx \rightarrow x dx = \frac{1}{r} du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{rx^r - 1}} &= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \left(\frac{1}{r} du \right) = \frac{1}{r} \int u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{r} \left(\frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right) + c \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) + c = \frac{1}{r} \sqrt{u} + c = \frac{1}{r} \sqrt{rx^r - 1} + c \end{aligned}$$

$$۲) \int x \sqrt{1+x} dx$$

$$u = 1+x \rightarrow (du = dx, x = u-1)$$

$$\begin{aligned} \int x \sqrt{1+x} dx &= \int (u-1) \sqrt{u} du = \int (u-1) u^{\frac{1}{2}} du \\ &= \int (u^{\frac{3}{2}} - u^{\frac{1}{2}}) du = \frac{u^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c \\ &= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{2}} \sqrt{u^5} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}} \sqrt{u^3} + c \\ &= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{2}} \sqrt{(1+x)^5} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}} \sqrt{(1+x)^3} + c \end{aligned}$$

$$۳) \int \frac{x^r}{\sqrt{x+r}} dx$$

$$u = x+r \rightarrow (du = dx, x = u-r)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^r}{\sqrt{x+r}} dx &= \int \frac{(u-r)^r}{\sqrt{u}} du = \int u^{-\frac{1}{2}} (u^r - ru + r) du \\ &= \int (u^{\frac{r}{2}} - ru^{\frac{r-1}{2}} + ru^{\frac{r-1}{2}}) du \\ &= \frac{u^{\frac{r}{2}+1}}{\frac{r}{2}+1} - r \left(\frac{u^{\frac{r-1}{2}+1}}{\frac{r-1}{2}+1} \right) + r \left(\frac{u^{\frac{r-1}{2}+1}}{\frac{r-1}{2}+1} \right) + c \\ &= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{5}{2}} \sqrt{(x+r)^5} - \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2}} \sqrt{(x+r)^3} + \frac{2}{3} \sqrt{(x+r)^3} + c \end{aligned}$$

فصل دوم قوانین انتگرال گیری: قوانین زیر از مشتق توابع مثلثاتی به دست آمده‌اند.

$$۱) (\sin x)' = \cos x \rightarrow \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$۲) (\cos x)' = -\sin x \rightarrow \int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$۳) (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\rightarrow \int (1 + \tan^2 x) \, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

$$۴) (\cot x)' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$\rightarrow \int (1 + \cot^2 x) \, dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = \int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$$

$$۵) (\sec x)' = \sec x \tan x \rightarrow \int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$$

$$۶) (\csc x)' = -\csc x \cot x \rightarrow \int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$$

مثال ۸: انتگرال‌های زیر به کمک قوانینی که تا کنون خوانده‌ایم حل شده‌اند.

$$۱) \int (\sin x - \cos x) \, dx = -\sin x - \cos x + c$$

$$۲) \int \cos 2x \, dx$$

$$u = 2x \rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\int \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int \cos u \, du = \frac{1}{2} \sin u + c = \frac{1}{2} \sin 2x + c$$

$$۳) \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx$$

$$u = \sin x \rightarrow du = \cos x \, dx$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \, dx = \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-2} \, du = \frac{u^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{u} + c = \frac{-1}{\sin x} + c$$

$$۴) \int x \sin(x^2 + 1) \, dx$$

$$u = x^2 + 1 \rightarrow du = 2x \, dx \rightarrow x \, dx = \frac{1}{2} du$$

$$\begin{aligned} \int x \sin(x^2 + 1) \, dx &= \frac{1}{2} \int \sin u \, du = \frac{-1}{2} \cos u + c \\ &= \frac{-1}{2} \cos(x^2 + 1) + c \end{aligned}$$

$$۵) \int \sin 2x \cos^5 2x \, dx$$

$$u = \cos 2x \rightarrow du = -2 \sin 2x \, dx \rightarrow \sin 2x \, dx = \frac{-1}{2} du$$

$$\int \sin 2x \cos^5 2x \, dx = \frac{-1}{2} \int u^5 \, du = \frac{-1}{2} \frac{u^6}{6} + c = \frac{-1}{12} \cos^6 2x + c$$

$$۶) \int \cos x \sqrt{1 + \sin x} \, dx$$

$$u = 1 + \sin x \rightarrow du = \cos x \, dx$$

$$\begin{aligned} \int \cos x \sqrt{1 + \sin x} \, dx &= \int \sqrt{u} \, du = \int u^{\frac{1}{2}} \, du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{u^3} + c = \frac{2}{3} \sqrt{(1 + \sin x)^3} + c \end{aligned}$$

$$۷) \int (1 + \tan^2 \Delta x) \, dx$$

$$u = \Delta x \rightarrow du = \Delta x \rightarrow dx = \frac{1}{\Delta} du$$

$$\begin{aligned} \int (1 + \tan^2 \Delta x) \, dx &= \frac{1}{\Delta} \int (1 + \tan^2 u) \, du = \frac{1}{\Delta} \tan u + c \\ &= \frac{1}{\Delta} \tan(\Delta x) + c \end{aligned}$$

$$۸) \int \frac{1}{\sin^2 2x} \, dx$$

$$u = 2x \rightarrow du = 2 \, dx \rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sin^2 2x} \, dx &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sin^2 u} \, du = \frac{1}{2} \int \csc^2 u \, du \\ &= \frac{-1}{2} \cot u + c = \frac{-1}{2} \cot 2x + c \end{aligned}$$

$$۹) \int \sec^2(2x - 1) \, dx$$

$$u = 2x - 1 \rightarrow du = 2 \, dx \rightarrow dx = \frac{1}{2} du$$

$$\int \sec^2(2x - 1) \, dx = \frac{1}{2} \int \sec^2 u \, du = \frac{1}{2} \tan u + c = \frac{1}{2} \tan(2x - 1) + c$$

$$۱۰) \int \sec(\Delta x + 2) \tan(\Delta x + 2) \, dx$$

$$u = \Delta x + 2 \rightarrow du = \Delta x \rightarrow dx = \frac{1}{\Delta} du$$

$$\begin{aligned} \int \sec(\Delta x + 2) \tan(\Delta x + 2) \, dx &= \frac{1}{\Delta} \int \sec u \tan u \, du \\ &= \frac{1}{\Delta} \sec u + c = \frac{1}{\Delta} \sec(\Delta x + 2) + c \end{aligned}$$

فرمول سوم قوانین انتگرال گیری: قوانین زیر از مشتق توابع معکوس مثلثاتی به دست آمده است.^(۱)

$$۱) (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$$

$$۲) (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2} \rightarrow \int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$$

$$۳) (\sec^{-1} x)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \rightarrow \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1} |x| + c$$

از سه فرمول انتگرال گیری فوق با فرض $a > 0$ و به کمک تغییر متغیر $u = \frac{x}{a}$ سه فرمول زیر را می توان نتیجه گرفت. در مثال بعد اثبات یکی از این فرمول ها را آورده ایم.

$$۴) \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$۵) \int \frac{1}{a^2+x^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

$$۶) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-a^2}} dx = \frac{1}{a} \sec^{-1} \left| \frac{x}{a} \right| + c$$

مثال ۱۲: اثبات فرمول انتگرال گیری شماره ۴ به کمک فرمول شماره ۱ به شرح زیر می باشد. لازم به یادآوری است که $a > 0$ می باشد.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{a^2(1-\frac{x^2}{a^2})}} dx = \int \frac{1}{a\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} \frac{1}{a} dx \\ (u = \frac{x}{a} \rightarrow du = \frac{1}{a} dx) \\ &= \int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \sin^{-1} u + c = \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c \end{aligned}$$

$$۱) \int \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{r^2-x^2}} dx = \sin^{-1} \left(\frac{x}{r} \right) + c$$

$$۲) \int \frac{1}{r^2+x^2} dx = \frac{1}{r} \int \frac{1}{r^2+x^2} dx = \frac{1}{r} \left(\frac{1}{r} \right) \tan^{-1} \left(\frac{x}{r} \right) + c$$

$$\begin{aligned} ۳) \int \frac{1}{rx\sqrt{r^2x^2-1}} dx &= \frac{1}{r} \int \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} du = \frac{1}{r} \sec^{-1} |u| + c \\ &= \frac{1}{r} \sec^{-1} |rx| + c \end{aligned}$$

$$u = rx \rightarrow du = r dx \rightarrow dx = \frac{1}{r} du$$

$$\begin{aligned} ۴) \int \frac{dx}{\sqrt{r^2-4x^2}} &= \frac{1}{r} \int \frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} = \frac{1}{r} \sin^{-1} \left(\frac{u}{r} \right) + c = \frac{1}{r} \sin^{-1} \left(\frac{rx}{r} \right) + c \\ u = rx \rightarrow du = r dx \rightarrow dx &= \frac{1}{r} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۵) \int \frac{dx}{r^2x^2+r^2\delta} &= \frac{1}{r} \int \frac{du}{u^2+\delta^2} = \frac{1}{r} \frac{1}{\delta} \tan^{-1} \left(\frac{u}{\delta} \right) + c = \frac{1}{r\delta} \tan^{-1} \left(\frac{rx}{\delta} \right) + c \\ u = rx \rightarrow du = r dx \rightarrow dx &= \frac{1}{r} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۶) \int \frac{dx}{x^2+rx+\delta} &= \int \frac{du}{u^2+r^2} = \frac{1}{r} \tan^{-1} \left(\frac{u}{r} \right) + c = \frac{1}{r} \tan^{-1} \left(\frac{x+r}{r} \right) + c \\ x^2+rx+\delta &= (x^2+rx+1) + \delta = (x+1)^2 + r^2 = u^2 + r^2 \\ u = x+1 \rightarrow du &= dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۷) \int \frac{dx}{\sqrt{r-x^2-rx}} &= \int \frac{du}{\sqrt{r^2-u^2}} = \sin^{-1} \left(\frac{u}{r} \right) + c = \sin^{-1} \left(\frac{x+1}{r} \right) + c \\ r-x^2-rx &= r - (x^2+rx+1) = r^2 - (x+1)^2 = r^2 - u^2 \\ u = x+1 \rightarrow du &= dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۸) \int \frac{x^r dx}{\sqrt{1-x^r}} &= \int \frac{x^r dx}{\sqrt{1-(x^r)^2}} \\ u = x^r \rightarrow du &= rx^{r-1} dx \rightarrow x^r dx = \frac{1}{r} du \\ &= \frac{1}{r} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{r} \sin^{-1} u + c = \frac{1}{r} \sin^{-1} (x^r) + c \end{aligned}$$

مثله چهارم قوانین انتگرال گیری: قوانین زیر از مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

۱) $(a^x)' = (\ln a) a^x \rightarrow \int a^x dx = \frac{1}{\ln a} a^x + c$ یافته شده است.

۲) $(e^x)' = e^x \rightarrow \int e^x dx = e^x + c$ برای حالت قبل یا فرض $a = e$ داریم:

۳) $(\ln x)' = \frac{1}{x} \rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

مثال ۱۲: انتگرال های زیر به کمک قوانینی که تا کنون خوانده ایم حل شده اند.

۱) $\int r^x dx = \frac{1}{\ln r} r^x + c$

۲) $\int e^{rx+1} dx = \frac{1}{r} \int e^u du = \frac{1}{r} e^u + c = \frac{1}{r} e^{rx+1} + c$

$u = rx + 1 \rightarrow du = r dx \rightarrow dx = \frac{1}{r} du$

۳) $\int \frac{dx}{rx-1} = \frac{1}{r} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{r} \ln|u| + c = \frac{1}{r} \ln|rx - 1| + c$

$u = rx - 1 \rightarrow du = r dx \rightarrow dx = \frac{1}{r} du$

۴) $\int \cos rx e^{\sin rx} dx = \frac{1}{r} \int e^u du = \frac{1}{r} e^u + c = \frac{1}{r} e^{\sin rx} + c$

$u = \sin rx \rightarrow du = r \cos rx dx \rightarrow \cos rx dx = \frac{1}{r} du$

۵) $\int x r^{x^r+r} dx = \frac{1}{r} \int r^u du = \frac{1}{r \ln r} r^u + c = \frac{r^{x^r+r}}{r \ln r} + c$

$u = x^r + r \rightarrow du = rx dx \rightarrow x dx = \frac{1}{r} du$

۶) $\int \frac{e^x}{e^x+r} dx = \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c = \ln|e^x + r| + c$

$u = e^x + r \rightarrow du = e^x dx$

۷) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{du}{u} = -\ln|u| + c = -\ln|\cos x| + c$

$u = \cos x \rightarrow du = -\sin x dx \rightarrow \sin x dx = -du$

۲- انتگرال گیری به روش جزء به جزء

مشاهده کردید هر قانون انتگرال گیری با یک قانون مشتق گیری متناظر می باشد. متناظر با قانون مشتق تابع مرکب، روش تغییر متغیر را معرفی کردیم. اکنون متناظر با قانون مشتق حاصل ضرب دو تابع، روشی دیگر برای انتگرال گیری بیان می کنیم. فرض کنید u و v توابعی مشتق پذیر از x باشند. بنابر قانون مشتق حاصل ضرب دو تابع داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d(uv)}{dx} &= u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \rightarrow d(uv) = u dv + v du \\ \rightarrow \int d(uv) &= \int u dv + \int v du \\ \rightarrow uv &= \int u dv + \int v du \rightarrow \boxed{\int u dv = uv - \int v du} \end{aligned}$$

فرمول اخیر را انتگرال گیری به روش جزء به جزء می نامند. استفاده از این روش زمانی موفقیت آمیز خواهد بود که u و dv مناسب اختیار شود. این کار ابتدا با آزمایش و خطا و سپس تجربه حاصل می شود.

مثال ۱: انتگرال های زیر به روش جزء به جزء حل شده اند.

$$\begin{aligned} ۱) \int x \sin x dx \\ \begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = \sin x dx \rightarrow v = -\cos x \end{cases} \\ \int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۲) \int x \ln x dx \\ \begin{cases} u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \frac{1}{2} x^2 \end{cases} \\ \int x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x dx \\ = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} x^2 + c = \frac{1}{2} x^2 (2 \ln x - 1) + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ۳) \int x e^x dx \\ \begin{cases} u = x \rightarrow du = dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{cases} \\ \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c = e^x (x - 1) + c \end{aligned}$$

$$۴) \int x^2 e^x dx$$

$$\begin{cases} u = x^2 \rightarrow du = 2x dx \\ dv = e^x dx \rightarrow v = e^x \end{cases}$$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

برای محاسبه $\int x e^x dx$ باید یک بار دیگر از روش جزء به جزء استفاده کنیم، این انتگرال را در صفحه قبل حل کردیم، پس داریم:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2(xe^x - e^x) + c = (x^2 - 2x + 2)e^x + c$$

$$۵) \int \tan^{-1} x dx$$

$$\begin{cases} u = \tan^{-1} x \rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$$

$$\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

برای محاسبه $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ از تغییر متغیر $u = 1 + x^2$ استفاده می‌کنیم و داریم:

$$\int \tan^{-1} x dx = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln|1+x^2| + c$$

$$۶) \int e^x \sin x dx$$

$$\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^x dx \\ dv = \sin x dx \rightarrow v = -\cos x \end{cases}$$

$$I = \int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \quad (*)$$

برای محاسبه $\int e^x \cos x dx$ بار دیگر از روش جزء به جزء استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} u = e^x \rightarrow du = e^x dx \\ dv = \cos x dx \rightarrow v = \sin x \end{cases}$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - I$$

با قرار دادن رابطه اخیر در * داریم:

$$I = -e^x \cos x + (e^x \sin x - I) \rightarrow 2I = e^x (\sin x - \cos x)$$

$$\rightarrow I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + c$$

۳- انتگرال گیری از توابع گویا به روش تجزیه کسر ها

قبل از توضیح این روش به یادآوری بحث تجزیه کسر ها^(۱) می پردازیم. هر گاه $p(x)$ و $q(x)$ چند جمله ای باشند، هر عبارت به صورت $\frac{p(x)}{q(x)}$ را یک کسر گویا می نامند. هر گاه درجه صورت یک کسر گویا از درجه مخرج آن بیشتر یا مساوی باشد می توان به تقسیم صورت بر مخرج، آن را به مجموع یک چند جمله ای و یک کسر گویا که درجه صورت آن از درجه مخرج کمتر است تبدیل کرد و با تجزیه مخرج کسر جدید، می توان این کسر گویا را به صورت مجموع یا تفاضل چند کسر گویای دیگر نوشت. این عمل را تجزیه کسر ها می گویند. در حالت های زیر که با ذکر مثال هایی همراه است با نحوه تجزیه این نوع کسر ها وقتی عوامل مخرج درجه یک یا دو باشند، آشنا می شوید.

حالت اول: عوامل مخرج درجه یک و غیر تکراری

$$\frac{1}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}, \quad \frac{x^2-5x+1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

حالت دوم: عوامل مخرج درجه یک و بعضی تکراری

$$\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1}, \quad \frac{2x^2-3x}{(x+1)^2(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{x+2}$$

حالت سوم: عوامل مخرج درجه یک یا دو و عوامل درجه دو غیر تکراری

$$\frac{2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}, \quad \frac{3x^2-7x}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2}$$

حالت چهارم: عوامل مخرج درجه یک یا دو و بعضی از عوامل درجه دو تکراری

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

$$\frac{7x^2+3x+1}{(x^2+1)^2(x^2+2)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+2}$$

مثال ۲: کسر $p = \frac{2x+2}{(x^2+1)(x-1)}$ را تجزیه کنید.

حل: این کسر مشابه حالت سوم می‌باشد، لذا آن را به صورت زیر می‌توان تجزیه کرد:

$$p = \frac{2x+2}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

با مخرج مشترک‌گیری و مساوی قرار دادن صورت کسرها داریم:

$$A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) = 2x+2$$

$$(A+B)x^2 + (C-B)x + (A-C) = 2x+2$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C-B=2 \\ A-C=2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ C=0 \end{cases} \rightarrow P = \frac{2}{x-1} - \frac{2x}{x^2+1}$$

نکته: برای یافتن مقادیر A ، B و C غیر از حل دستگاه، روش‌های دیگری نیز وجود

دارد. یکی از آنها را همراه با حل دوباره قسمتی از مثال ۲ توضیح می‌دهیم. در مثال قبل

$$A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1) = 2x+2 \quad \text{معادله مقابل یک اتحاد است:}$$

بنابراین به ازای کلیه مقادیر x ، تساوی برقرار است. لذا با انتخاب مقادیری خاص برای x

می‌توان معادله را ساده و مقادیر A ، B و C را به دست آورد.

$$۱) x=1 \rightarrow 2A=4 \rightarrow A=2$$

$$۲) (x=0, A=2) \rightarrow 2-C=2 \rightarrow C=0$$

$$۳) (x=2, A=2, C=0) \rightarrow 10+2B=6 \rightarrow B=-2$$

مثال ۳: انتگرال‌های توابع گویای زیر به روش تجزیه کسرها حل شده‌اند.

$$۱) \int \frac{2x-1}{x+1} dx$$

$$\frac{2x-1}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1} \quad \text{با تقسیم صورت بر مخرج و نوشتن رابطه تقسیم داریم:}$$

$$\int \frac{2x-1}{x+1} dx = \int 2 dx - 3 \int \frac{1}{x+1} dx = 2x - 3 \ln|x+1| + C$$

$$۲) \int \frac{5x-1}{x^2-1} dx$$

$$\frac{5x-1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \rightarrow (A=2, B=3)$$

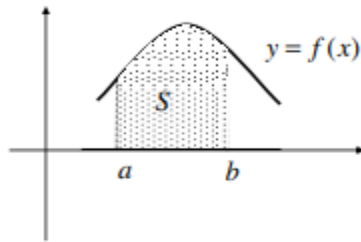
$$\int \frac{5x-1}{x^2-1} dx = 2 \int \frac{1}{x-1} dx + 3 \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= 2 \ln|x-1| + 3 \ln|x+1| + C$$

کاربرد هایی برای انتگرال

در اینجا در پی آن هستیم که بطور خیلی مختصر دو کاربرد انتگرال در محاسبه ی مساحت زیر منحنی و همچنین حجم جسم دوار را توضیح دهیم.

محاسبه ی مساحت زیر منحنی



فرض کنید که تابع f در بازه ی $[a, b]$ تعریف شده و پیوسته باشد. مساحت محدود به منحنی $y = f(x)$ و محور x ها و خطوط $x = a$ و $x = b$ طبق تعریف انتگرال معین را می توان به صورت زیر تعیین کرد.

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| F(x) \Big|_a^b \right| = |F(b) - F(a)|$$

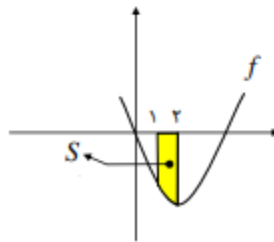
تذکره: علامت قدر مطلق به این دلیل گنجانده شده است که مساحت همواره یک عدد حقیقی غیر منفی است.

تمرین: نمودار تابع $y = x^2 - 4x$ را رسم کنید و پس سطح محصور بین این تابع و محور طولها و دو خط $x = 1$ و $x = 2$ را محاسبه کنید.

حل:

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{-4}{2(1)} = 2$$

x	۰	۲	۴
y	۰	-۴	۰



$$\begin{aligned} \int_1^2 (x^2 - 4x) dx &= \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{2}x^2 \right) \Big|_1^2 = \left[\frac{1}{3}(8) - \frac{4}{2}(4) \right] - \left[\frac{1}{3}(1) - \frac{4}{2}(1) \right] \\ &= \frac{8}{3} - 8 - \frac{1}{3} + 2 = -\frac{11}{3} \end{aligned}$$

چند مثال از انتگرال معین

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال ۲: انتگرال های معین زیر به کمک قضیه دوم حساب دیفرانسیل حل شده اند.

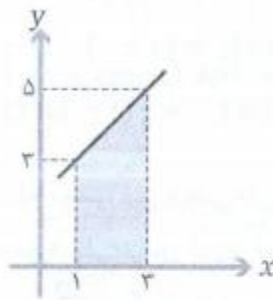
$$۱) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x dx = \sin x \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} = 1 - 0 = 1$$

$$۲) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x \Big|_{\frac{1}{2}}^1 = \tan^{-1} 1 - \tan^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0$$

$$۳) \int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{1}{u} du = \ln u \Big|_{\ln 2}^{\ln 8} = \ln 8 - \ln 2 = \ln 4 = 2 \ln 2 = 1.386$$

مثال ۱: سطح محصور بین منحنی $f(x) = x + 2$ و محور x ها و خطوط $x = 1$ و

$x = 3$ را بیابید.



حل: سطح مورد نظر یک ذوزنقه با قاعده‌های

۲ و ۵ و ارتفاع ۲ می‌باشد. مساحت این ذوزنقه

$$S = \frac{2(2+5)}{2} = 8 \quad \text{برابر است با:}$$

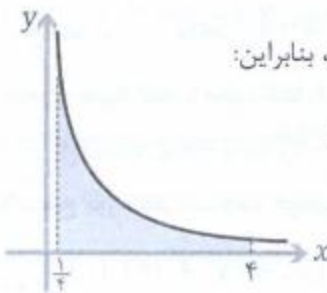
از فرمول محاسبه سطح به کمک انتگرال نیز

همین نتیجه به دست می‌آید.

$$S = \int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 (x + 2) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x \right]_1^3 = \frac{21}{2} - \frac{5}{2} = 8$$

مثال ۲: سطح محصور بین منحنی $f(x) = \frac{1}{x}$ و محور x ها و خطوط $x = \frac{1}{4}$ و

$x = 4$ را بیابید.



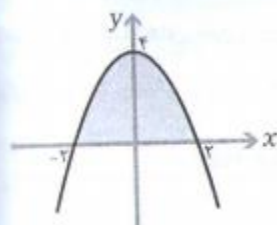
حل: سطح مورد نظر به صورت مقابل می‌باشد، بنابراین:

$$S = \int_{\frac{1}{4}}^4 \frac{1}{x} dx = [Ln|x|]_{\frac{1}{4}}^4$$

$$= Ln 4 - Ln \frac{1}{4} = Ln 4 - Ln 4^{-1}$$

$$= Ln 4 - (-Ln 4) = 2 Ln 4$$

مثال ۳: سطح محصور بین منحنی $f(x) = 4 - x^2$ و محور x ها را بیابید.

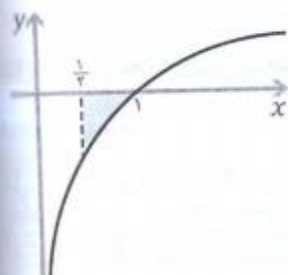


حل: تابع f در نقاط $x = \pm 2$ محور x ها را قطع می‌کند. سطح مورد نظر به صورت مقابل می‌باشد.

بنابراین داریم:

$$S = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 2 \int_0^2 (4 - x^2) dx = 2 \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{32}{3}$$

مثال ۴: سطح محصور بین منحنی $f(x) = \ln x$ و خطوط $y = 0$ و $x = \frac{1}{2}$ را بیابید.

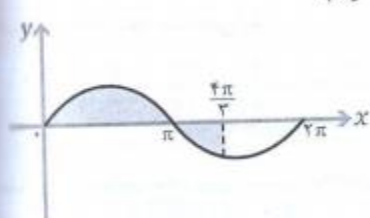


حل: سطح مورد نظر به صورت زیر است. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} S &= - \int_{\frac{1}{2}}^1 \ln x \, dx = -[x \ln x - x]_{\frac{1}{2}}^1 \\ &= [x - x \ln x]_{\frac{1}{2}}^1 = (1 - 0) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln 2^{-1} = \frac{1}{2} (1 - \ln 2) \end{aligned}$$

مثال ۵: سطح محصور بین منحنی‌های $y = \sin x$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ و $x = \frac{5\pi}{2}$ را بیابید.

حل: سطح مورد نظر به صورت زیر است. بنابراین داریم:



$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi \sin x \, dx + \left(- \int_\pi^{5\pi/2} \sin x \, dx \right) \\ &= [-\cos x]_0^\pi + [\cos x]_{\pi}^{5\pi/2} \\ &= (1 + 1) + \left(-\frac{1}{2} + 1 \right) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

مثال ۶: سطح محصور بین منحنی $f(x) = x^2 - 3x^2 + 2x$ و محور x ها را بیابید.

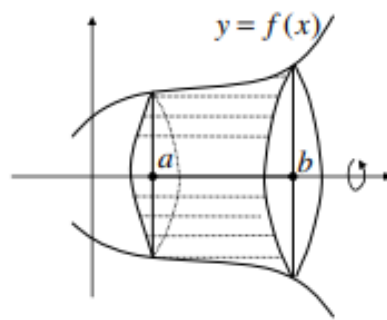
حل: ابتدا نقاط برخورد تابع با محور x ها را به دست می‌آوریم.

$$x^2 - 3x^2 + 2x = 0 \rightarrow x(x - 1)(x - 2) = 0 \rightarrow x = 0, 1, 2$$

پس از رسم سطح مورد نظر، مشاهده خواهید کرد مساحت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$S = \int_0^1 (x^2 - 3x^2 + 2x) \, dx + \left(- \int_1^2 (x^2 - 3x^2 + 2x) \, dx \right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

محاسبه ی حجم جسم دوار



فرض کنیم که تابع $y = f(x)$ تابعی پیوسته در بازه ی $[a, b]$ باشد. اگر سطح محصور بین منحنی $y = f(x)$ و خطوط $x = a$ و $x = b$ را حول محور طولها دوران دهیم، یک جسم دوار حاصل می شود.

حجم جسم دوار در فاصله ی $[a, b]$ به صورت زیر محاسبه می شود.

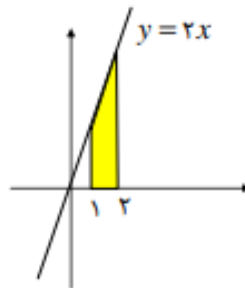
$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

تمرین:

اولاً: نمودار تابع $y = 2x$ را رسم کنید.

ثانیاً: حجم جسم حادث از دوران سطح محصور بین این تابع و محور طولها و دو خط $x = 1$ و $x = 2$ را محاسبه کنید.

حل:



x	$\cdot$	2
y	$\cdot$	4

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \pi \int_1^2 4x^2 dx = \pi \times \frac{4}{3} x^3 \Big|_1^2 = \frac{4}{3} \pi (2^3 - 1^3) = 36\pi$$

واحد حجم

تمرین: سطح محصور بین منحنی نمایش تابع $y = \sqrt{x-2}$ محور طولها و دو خط

$x = 2$ و $x = 4$ را دوران می دهیم. حجم جسم حادث از دوران نمودار تابع فوق حول محور طولها را محاسبه کنید.

تمرین: حجم جسم حادث از دوران خط $y = 4$ حول محور طولها و محصور بین دو خط $x = 2$ و $x = 5$ را بدست آورید.

تمرین: با توجه به شکل مقابل حجم ناحیه ی محصور بین دو استوانه را محاسبه کنید.

