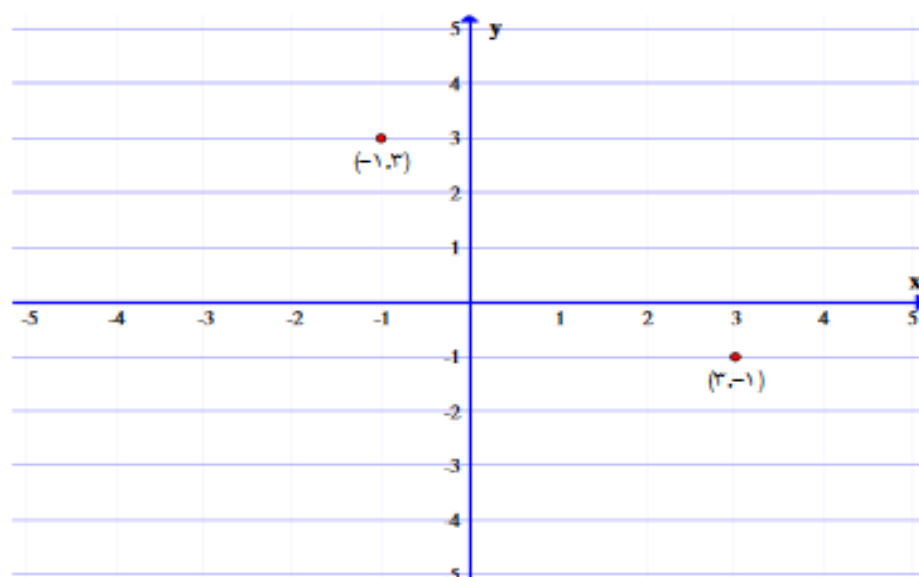


زوج مرتب

هر دو تایی از اعداد حقیقی به صورت (a, b) که در آن مکان دو عدد a و b مهم باشند را زوج مرتب می نامند. در زوج مرتب (a, b) عدد a را مؤلفه ی اول یا مختص اول و عدد b را مؤلفه ی دوم یا مختص دوم می نامند. بدیهی است که اگر در یک زوج مرتب جای مؤلفه های اول و دوم را عوض کنیم آن زوج مرتب تغییر می کند.

برای مثال موقعیت هر نقطه در صفحه، یا یک زوج مرتب به نام مختصات آن نقطه نمایش داده می شود. بدیهی است که اگر جای مؤلفه ها ی یک نقطه، جابجا شوند، موقعیت نقطه در صفحه نیز تغییر می کند.



دو زوج مرتب تایی (a, b) و (c, d) را مساوی می نامند در صورتی که مؤلفه ای نظیر به نظیر آنها مساوی باشند. یعنی:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c, b = d$$

تمرین: دو زوج مرتب زیر برابر می باشند. مقدار m و n را بیابید.

$$(2m + 3n, 2m - 2n) \text{ و } (8, -1)$$

حل:

$$\begin{cases} 2m + 3n = 8 \\ 2m - 2n = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2m + 3n = 8 \\ 2m - 2n = -1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4m + 6n = 16 \\ 2m - 2n = -1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} +) \\ \hline 12m = 13 \rightarrow m = 1 \end{array}$$

$$2m + 3n = 8 \xrightarrow{m=1} 2(1) + 3n = 8 \rightarrow n = 2$$

تابع

تعریف: تابع، مجموعه‌ی زوج‌های مرتبی است که هیچ دو زوج متمایز آن مؤلفه‌ی اول یکسان نداشته باشند.

به عنوان مثال، مجموعه‌ی $f = \{(1,2), (2,0), (3,-1), (0,2)\}$ تابع است،

ولی مجموعه‌ی $g = \{(2,4), (1,3), (4,8), (1,-1)\}$ تابع نیست، زیرا دو زوج متمایز $(1,3)$ و $(1,-1)$ در آن مؤلفه‌ی اول یکسان دارند.

دامنه و برد تابع

مجموعه‌ی مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب یک تابع را دامنه (حوزه‌ی تعریف) و مجموعه‌ی مؤلفه‌های دوم آنرا برد (حوزه‌ی مقادیر) می‌نامند. مثلاً در تابع

$$f = \{(1,2), (2,0), (3,-1), (0,2)\}$$

$$D_f = \{1,2,3,0\} \quad \text{دامنه}$$

$$R_f = \{2,0,-1\} \quad \text{برد}$$

ضابطه‌ی تابع

در واقع باید بین مؤلفه‌های اول و مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب تابع یک ارتباط یکسان برقرار باشد، به عبارت دیگر در هر تابع رابطه‌ای باید وجود داشته باشد که طول هر زوج را به عرض آن تبدیل کند؛ این رابطه را ضابطه یا معادله‌ی تابع می‌گویند. به عبارتی دیگر ضابطه‌ی تابع معادله‌ای است که هر عضو دامنه را به یک عضو متحصر ببرد از برد نظیر کند.

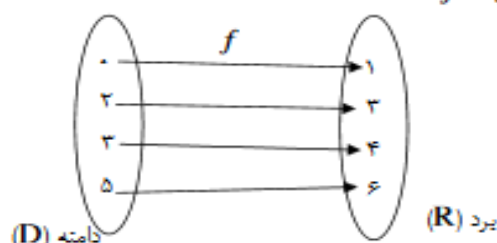
$$f: D \rightarrow R$$

$$y = f(x)$$

مثلاً در تابع $f = \{(2,3), (3,4), (0,1), (5,6)\}$ f مؤلفه‌ی دوم هر زوج یک واحد از مؤلفه‌ی اول آن بیشتر است. پس می‌توان نوشت:

$$f = \{(x, y) \mid y = x + 1\}$$

که در آن $x \in D_f = \{0,2,3,5\}$ می‌باشد.



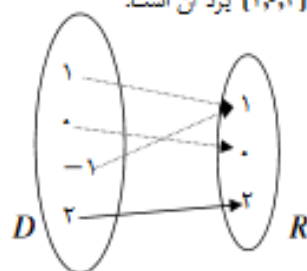
مثال: تابعی که هر عضو از اعداد حقیقی را دو برابر کند، دارای ضابطه‌ای به شکل $y = 2x$ می‌باشد. پس

$$f: R \rightarrow R$$

$$y = f(x) = 2x$$

مثال: مجموعه ی $f = \{(1,1), (0,0), (-1,1), (2,2)\}$ یک تابع می باشد و معادله ی $y = |x|$ آن می شود. همچنین

مجموعه ی $\{1,0,-1,2\}$ دامنه و مجموعه ی $\{1,0,2\}$ برد آن است.



تمرین برای حل:

۱: معادله ی تابعی را بنویسید که مساحت مربع را به ضلع آن وابسته کند.

۲: معادله ی تابعی را بنویسید که مساحت مربع را به قطر آن وابسته کند.

توجه: گاهی لازم است که تابع را با چند ضابطه تعریف کرد.

$$f(x) = \begin{cases} m(x) & x \in D_m \\ n(x) & x \in D_n \end{cases}$$

که در این صورت دامنه این تابع یا اجتماع دامنه های تمام ضابطه های آن برابر است. $D_f = D_m \cup D_n$

مثال ۱) تابع قدر مطلق یک تابع دو ضابطه ای است.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

مثال ۲) تابع علامت یک تابع سه ضابطه ای است.

$$S(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

تمرین: با توجه به تابع مقابل تساوی های زیر را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 1 & x \geq 2 \\ |x| & x < 2 \end{cases}$$

$$۱) f(-1/5) =$$

$$۲) f(-4) =$$

$$۵) f(1/8) =$$

$$۳) f(\sqrt{2}) =$$

$$۴) f(2) =$$

مقدار تابع در یک نقطه

در تابع $f = \{(2, 5), (0, 3), (4, -1), (-2, 5)\}$ مقدار تابع در نقطه ی ۲ برابر ۵ است و می نویسند: $f(2) = 5$ همچنین

مقدار تابع در نقطه ی ۰ برابر ۳ است، لذا $f(0) = 3$

اگر معادله ی تابع معلوم باشد، برای تعیین مقدار تابع در نقطه ی x_0 از دامنه ی آن، کافی است مقدار x_0 را در معادله ی تابع

به جای x جایگزین کنیم. یعنی $y_0 = f(x_0)$

تمرین: اگر $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ مقدار تابع را در نقاط داده شده، یافته و جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱	۱	۲	۰	-۲	۳
$f(x)$						

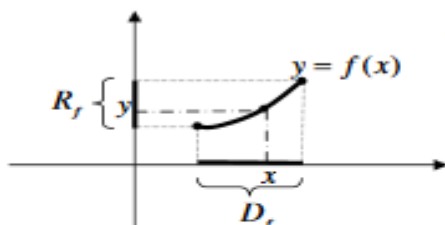
تمرین: اگر $f(x) = -x^2 + 3x + 1$ و $g(x) = 3x^2 - 3x + 1$ تساوی های زیر را کامل کنید.

$$۱) f(-۱) = \quad \quad \quad ۲) 4f(2) = \quad \quad \quad ۵) 2f(۰) - g(1) =$$

.....

نمودار تابع

نمودار تابع مجموعه ی نقاط نظیر زوج های مرتب (x, y) از آن تابع است.

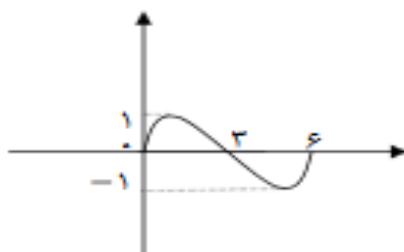


نتیجه: تصویر نمودار تابع روی محور x ها، دامنه و تصویر نمودار روی محور y ها، برد را مشخص می کنند. به عبارت دیگر

$$D_f = \{x \in R \mid (x, y) \in f\} \quad \text{دامنه}$$

$$R_f = \{y \in R \mid (x, y) \in f\} \quad \text{برد}$$

تمرین: دامنه و برد تابع یا نمودار زیر را مشخص کنید.



توان

$a^1 = a$	$a^0 = 1$ مهم	$a^n = aa^{n-1}$
$a^n a^m = a^{n+m}$ مهم	$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ مهم	$(a \cdot b)^n = a^n b^n$
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ مهم	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ مهم	$(a + b)^n \neq a^n + b^n$	

نکته: هرگاه $a > 1$ باشد هر چه توان بزرگتر باشد عدد حاصل نیز بزرگتر می‌شود.

مثلاً در مورد $a = 3$ داریم $3^{-2} < 3^{-1} < 3^2 < 3^5 < 3^7 < \dots$

برعکس هرگاه $0 < a < 1$ باشد هر چه توان بزرگتر باشد عدد حاصل کوچکتر می‌شود.

مثلاً در مورد $a = \frac{2}{3}$ داریم $\dots > \frac{2^{-3}}{3} > \frac{2^{-1}}{3} > \frac{2^2}{3} > \frac{2^7}{3} > \dots$

در فصل دوم خواهیم دید که $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

میتوانید بگوید چرا؟

شما دانشجو هستید و باید بتوانید با استفاده از اطلاعات بالا نمودار توابع نمایی $f(x) = a^x$ را رسم نمایید.

تعیین علامت

واضح است که اگر در یک عبارت $P(x)$ به جای x اعداد مختلفی قرار دهیم، برای آن عبارت هم مقادیر مختلفی بدست می‌آید. منظور از «تعیین علامت» عبارت P این است که مشخص کنیم به طور کلی:

جایگزینی کدام مقادیر جای x ، حاصل عبارت P را مثبت، منفی یا صفر خواهد کرد!

عبارت‌های درجه‌ی اول به صورت زیر تعیین علامت می‌شوند:

عبارت درجه ۱

اگر $P = ax + b$ یک عبارت درجه‌ی اول (یعنی: تابع خطی) باشد، علامت آن به صورت زیر تعیین می‌گردد:

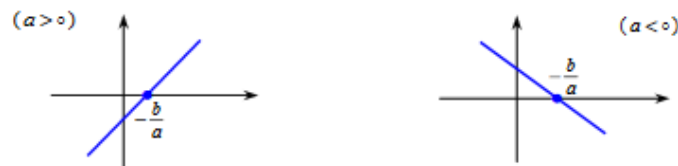
○ ریشه‌ی عبارت را مشخص می‌کنیم:

$$ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

○ این عبارت در چپ و راست a یعنی ضریب x علامت‌های مختلف دارد:

x	$-\frac{b}{a}$
P	موافق علامت a مخالف علامت a

توجه کنید: مقدار P همان عرض نقاط خط است و علامت‌های جدول و مثبت یا منفی بودن عرض نقاط یکی هستند:



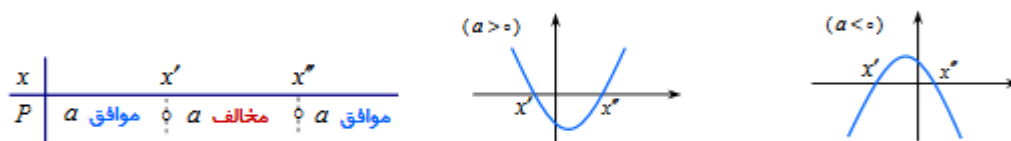
حل معادلات درجه دوم

به این ترتیب با فرض اینکه $\Delta > 0$ باشد معادله دارای دو جواب $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ، $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ می‌باشد. اگر $\Delta = 0$ باشد هر دو جواب برابرند و داریم: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$ و سرانجام اگر $\Delta < 0$ باشد گوئیم معادله جواب حقیقی ندارد.

$$\Delta : \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases} & \text{معادله دو ریشه حقیقی دارد} \\ \Delta = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} & \text{معادله ریشه مضاعف دارد} \\ \Delta < 0 \Rightarrow & \text{معادله جواب حقیقی ندارد} \end{cases}$$

عبارت درجه ۲: برای تعیین علامت عبارت درجه‌ی دوم $P = ax^2 + bx + c$ ، ابتدا معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ را تشکیل می‌دهیم. سپس با تعیین $\Delta = b^2 - 4ac$ با سه حالت مواجه می‌شویم:

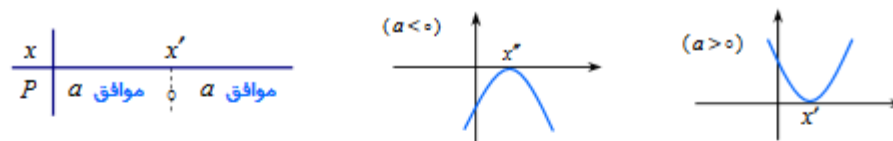
- **حالت ۱:** اگر $\Delta > 0$ ، آنگاه دو ریشه‌ی مختلف x' و x'' بدست آمده و P با جدول زیر تعیین علامت شده و نمودارهای مرتبط نیز که سهمی هستند را می‌بینید:



بنابراین در حالت $\Delta > 0$ ، علامت P گاهی مثبت و گاهی منفی است!

توجه کنید: در این حالت سهمی درجه‌ی دو، محور x ها را در دو نقطه‌ی مختلف قطع می‌کند.

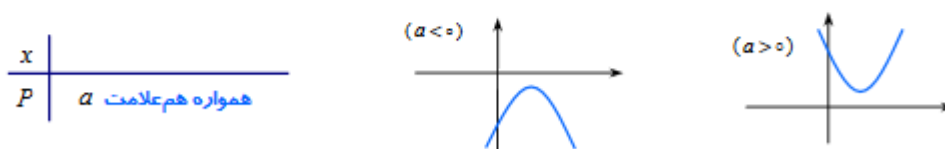
- **حالت ۲:** اگر $\Delta = 0$ ، آنگاه معادله‌ی بالا دو ریشه‌ی مضاعف $x' = x''$ دارد و علامت P و نمودارهای مربوطه عبارتند از:



بنابراین در حالت $\Delta = 0$ عبارت P در یک نقطه صفر و در بقیه جاها فقط یک علامت دارد.

توجه کنید: در این حالت نمودار P در یک نقطه بر محور x مماس است.

- **حالت ۳:** اگر $\Delta < 0$ ، آنگاه ریشه‌ای وجود نداشته، علامت P و نمودارها به صورت زیر هستند:



بنابراین در حالت $\Delta < 0$ عبارت P در کلیه‌ی نقاط فقط یک علامت دارد.

۴.۴ نامعادله

یکی از مهم‌ترین کاربردهای تعیین علامت حل نامعادلات جبری است. برای یافتن مقادیری از x که در شرط $p(x) > 0$ صدق می‌کند تنها راه تعیین علامت p است. حتی ممکن است p لزوماً چندجمله‌ای نباشد. قبل از هر چیز خواص مقدماتی نامساوی‌ها را بیان می‌کنیم.

مثال: نامعادلات زیر را حل کنید:

$$\frac{2x^2+x-6}{3x^2-7x-6} \geq 0$$

$$\text{ریشه‌های صورت: } 2x^2+x-6=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\text{ریشه‌های مخرج: } 3x^2-7x-6=0 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	3	$+\infty$
$2x^2+x-6$	+	o	-	-	o	+
$3x^2-7x-6$	+	+	o	-	-	o
P_1	+	o	///	o	///	o

مثال ۲۴.۴. عبارات زیر را تعیین علامت کنید.

$$۱) p = ۲x^۲ - x - ۳$$

$$۲) p = -x^۲ + x + ۲$$

$$۳) A = \frac{x(x-۳)^۲}{x^۲+x-۲}$$

$$۴) p = (x^۲-۹)(۳x-۱)$$

$$۵) B = \frac{-x^۲+۶x-۹}{x^۲+x+۳}$$

$$۶) C = \frac{x^۲-۱}{(x^۲+x+۱)(x-۳)}$$

روش محاسبه دامنه توابع حقیقی

در تابع با ضابطه $y = f(x)$ ، دامنه تابع بزرگ‌ترین زیر مجموعه از اعداد حقیقی است که اگر هر عضو آن را به جای x (ورودی) قرار دهیم، y (خروجی) نیز عدد حقیقی باشد. یعنی:

$$D_f = \{x \mid f(x) \in \mathbb{R}\}$$

جدول زیر قواعد عملی برای تعیین دامنه توابع مهم را نشان می‌دهد: ($n \in \mathbb{N}$)

مثال	دامنه تابع	نام تابع و قانون آن
دامنه تابع $y = 2x^5 - 3x$ برابر $\mathbb{R}$ است.	دامنه تابع، اعداد حقیقی است. $D_f = \mathbb{R}$	(۱) توابع چند جمله‌ای: $f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$
دامنه تابع $y = \frac{x^2}{x}$ برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است و دامنه تابع $y = \frac{1}{ x +1}$ برابر $\mathbb{R}$ است.	$D_h = \mathbb{R} - \{x \mid g(x) = 0\}$	(۲) توابع کسری (f و g چند جمله‌ای اند) $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$
دامنه تابع $y = \sqrt[n]{x^5 + x}$ برابر $\mathbb{R}$ است.	اگر فرجه فرد باشد: دامنه تعریف همان دامنه زیر رادیکال است.	(۳) توابع رادیکالی با فرجه فرد: $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$
دامنه تابع $y = \sqrt{x-x}$ برابر است با: $x \geq 0, \sqrt{x-x} \geq 0$ $\Rightarrow \sqrt{x} \geq x \Rightarrow x \geq x^2 \Rightarrow 0 \leq x \leq 1, x \geq 0$ $\longrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow D_f = [0, 1]$	اگر فرجه زوج باشد: باید زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم، یعنی: $D_f = \{x \mid g(x) \geq 0\}$	(۴) توابع رادیکالی با فرجه زوج: $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$
دامنه تابع $y = \left \frac{1}{x} \right $ برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است.	همان دامنه تابع داخل قدر مطلق است.	(۵) توابع قدر مطلق: $f(x) = g(x) $
دامنه تابع $y = \log \sqrt{x-1}$ ، بازه $(1, +\infty)$ است.	بنا بر تعریف لگاریتم داریم: $D_h = \{x \mid f(x) > 0, g(x) > 0, g(x) \neq 1\}$	(۶) توابع لگاریتمی: $h(x) = \log \frac{f(x)}{g(x)}$
دامنه تابع $y = \sin \frac{1}{x-1}$ برابر $\mathbb{R} - \{1\}$ است.	همان دامنه تابع $f(x)$ است.	(۷) توابع سینوس و کسینوس: $y = \sin(f(x))$ $y = \cos(f(x))$
	با استفاده از تبدیل $\frac{\cos x}{\sin x}$ و $\frac{\sin x}{\cos x}$ و سپس تعیین دامنه یک تابع کسری، دامنه را محاسبه می‌کنیم.	(۸) توابع تانژانت و کتانژانت: $y = \tan x$ $y = \cot x$

اعمال جبری روی توابع

اگر f و g دو تابع به ترتیب با دامنه‌های D_f و D_g باشند، آنگاه توابع $f+g$ و $f-g$ و $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) & , \quad D_{f+g} &= D_f \cap D_g \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x) & , \quad D_{f-g} &= D_f \cap D_g \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) & , \quad D_{f \cdot g} &= D_f \cap D_g \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} & , \quad D_{\frac{f}{g}} &= D_f \cap D_g - \{x \in D_g \mid g(x) = 0\} \end{aligned}$$

فصل دوم: حد و پیوستگی

قبل شروع فصل لازم است یادآوری های زیر را مورد توجه قرار دهید:

(منظور از 0^+ عددی حقیقی مثبت و بسیار کوچک در حد صفر و منظور از 0^- عددی منفی و بسیار کوچک است)

$$\pm a(+\infty) = \pm\infty \quad (3) \quad \pm a - \infty = -\infty \quad (2) \quad \pm a + \infty = +\infty \quad (1)$$

$$\frac{a}{+\infty} = 0^+ \quad (6) \quad \frac{a}{0^-} = -\infty \quad (5) \quad \frac{a}{0^+} = +\infty \quad (4)$$

$$\frac{a}{-\infty} = 0^- \quad (7)$$

مقایسه توان ها و ساده کردن آنها: فرض کنید $x = 0^+$ ابتدا هر یک از عبارت های زیر را ساده کنید و سپس حاصل را بیابید

$$f(x) = \frac{x^2}{x} \rightarrow f(0^+) = \frac{0^+}{1} = 0 \quad \text{توان صورت بیشتر از مخرج است}$$

$$g(x) = \frac{x}{x^2} \rightarrow g(0^+) = \frac{1}{0^+} = +\infty \quad \text{توان مخرج بیشتر از صورت است}$$

فرض کنید $x = +\infty$ و $f(x) = \frac{x^2}{x}$ و $g(x) = \frac{x}{x^2}$ مطلوب است محاسبه $f(+\infty)$ و $g(+\infty)$.

حد * مفهوم حد * حدود چپ و راست

مفهوم حد	برای یک تابع f اگر مقدارهای x در دامنه به عدد مانند a نزدیک شوند و نتیجه شود $f(x)$ به عددی مانند l نزدیک میشود، میگوییم تابع $f(x)$ در نقطه a حد دارد و حد آن برابر l است. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$
حد راست و حد چپ	وقتی x با مقادیر بزرگتر از 1 به 1 نزدیک میشود $f(x)$ به عدد 3 نزدیک میشود. اگر x با مقادیر کمتر از 1 به 1 نزدیک شود، $f(x)$ به عدد صفر نزدیک می شود. میگوییم حد راست $f(x)$ در نقطه 1 برابر با 3 و حد چپ $f(x)$ در نقطه 1 برابر با 0 میباشد و مینویسیم $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$
قضیه وجود حد	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ اگر و تنها اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ پس یادمون بماند اگر حد چپ و راست دو عدد متفاوت شد باید بگیم تابع حد ندارد. مثال: آیا $\lim_{x \rightarrow 3} 2x^3 - 2$ موجود است؟ (باید حد چپ و راست باهم برابر باشند)

چگونه حد یک تابع را بدست آوریم	1. حد تابع ثابت $f(x) = k$ در هر نقطه برابر است با k .	$f(x) = 5$ $\lim_{x \rightarrow 19} f(x) = 5 \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5, \dots$
	2. حد توابع چند جمله ای: کافی است به جای مقدار نقطه مورد نظر را قرار دهیم. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ $\lim_{x \rightarrow z} f(x) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$	$\lim_{x \rightarrow 2} (6x^3 + 3x^2 - 1)$ $= 6 \times 2^3 + 3 \times 2^2 - 1$ $= 59$
	3. ضریب ثابت k ، از داخل حد خارج میشود. $\lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \times \lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2}{3} (6x^3 + 3x^2 - 1)$ $= \frac{2}{3} \times 59$
	4. اگر $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l_1$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l_2$ آنگاه: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) + g(x) = l_1 + l_2$ $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = l_1 \cdot l_2$ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad l_2 \neq 0$ $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l_1}$	$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x + 5}{3x^2 - 1} = \frac{14}{80}$ $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{x^2 + 4} = \sqrt[3]{8} = 2$
	5. در توابع نمایی e^x و مثلثاتی $\sin x$, $\cos x$ برای محاسبه حد کافی است به جای x نقطه مورد نظر a را قرار دهیم. $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$	$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}}$ $= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$ $\lim_{x \rightarrow 3} (2 + x)^{3x^2} = 5^{27}$

حدهایی که باید حد چپ و راست آنها را جداگانه محاسبه کنیم	1. حد توابع چتر، صحیح $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n \\ \lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n - 1 \end{cases}$ و 1 در نقاط صحیح باید حد چپ و راست جداگانه محاسبه گردد.	مثال 1 $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2$ مثال 2 $\lim_{x \rightarrow 1^-} [-3x + 2] = \lim_{x \rightarrow 1^-} [-3x] + 2 = -1$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} [-3x + 2] = \lim_{x \rightarrow 1^+} [-3x] + 2 = -2$
	2. توابع دو ضابطه ای در نقاط مرزی حد چپ و راست جداگانه محاسبه میشود. $f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \leq a \\ f_2(x) & x > a \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f_1(x)$ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f_2(x)$	$f(x) = \begin{cases} 2x + 10 & x \geq 2 \\ -x + 9 & x < 2 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -x + 9 = 7$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x + 10 = 14$ سوال: اگر $f(x) = \begin{cases} \sin x & x \geq \pi \\ \cos x & x < \pi \end{cases}$ مطلوب است محاسبه حد راست و چپ تابع.
	3. حد توابع شامل قدر مطلق $ x = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ آقایون قبول دارید تابع قدر مطلق برای x های بزرگتر از صفر داخل قدر مطلق بدون تغییر و مثبت و برای x های کوچکتر از صفر درون قدر مطلق با ضرب در یک منفی عمل میکنه؛ پس در واقع یک تابع دو ضابطه ای. که ضابطه اون دقیق روی صفر داخل قدر مطلق تغییر میکنه. پس برای حد گرفتن اون هم در نقطه مرزی باید از حد چپ و راست استفاده کرد.	$f(x) = \frac{ x - 2 }{x - 2}$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -\frac{(x - 2)}{x - 2} = -1$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)}{x - 2} = 1$
	4. توابع کسری با صورت غیر صفر و مخرج صفر. از این فرصت استفاده کنیم و اعلام کنیم که کسرهایی که مخرج آنها کوچک میشود ولی صورت یک عدد ثابت مرتباً بزرگ و بزرگتر میشن تا بینهایت، علامت پی نهایت با توجه به صورت و مخرج تعیین میکنیم. $\frac{+2}{0} = -\infty, \quad \frac{+2}{0^+} = +\infty, \quad \frac{-2}{0} = +\infty, \quad \frac{-2}{0^+} = -\infty$	$f(x) = \frac{9}{x - 3}$ $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{9}{0^+} = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{9}{0^-} = -\infty$

مواردی که باید با صدای بلند اعلام کنیم حد نداریم	1. اگر $x \rightarrow a$ ((ایکس به سمت a میل کند)) اما مقادیر کمتر از a یا بیشتر از a در دامنه وجود نداشته باشد. پس حد نداریم فکر کن میخوای پری اون طرف رودخانه ولی پل وجود نداره. میشه؟ اصلا داریم؟ برادر من نتیجه این میشه که اول دامنه رو بدست بیار بخصوص توابع رادیکالی که ایکس به سمت ریشه زیر رادیکال میل میکنه. در مثال روپرو حد در نقطه 2 بررسی شده آیا میتوانید خودتان حد در نقطه 2- را بررسی کنید؟	$f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ اگر حد تابع در نقطه 2 را بدست بیاورید برای دامنه تعیین علامت میکنیم نواحی مثبت مطلوب است <table><tr><td>x</td><td>$x < -2$</td><td>$-2 < x < 2$</td><td>$x > 2$</td></tr><tr><td>$F(x)$</td><td>-</td><td>+</td><td>-</td></tr></table> در نقطه 2 تابع حد چپ دارد و برابر صفر است اما حد راست در نقطه 2 نداریم دلپیش هم معلومه چون دامنه در سمت راست 2 تعریف نشده. در کل میگیریم حد نداریم $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0$	x	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$	$F(x)$	-	+	-
	x	$x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$						
	$F(x)$	-	+	-						
	2. اگر حد تابع ∞ گردد.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(2x - 4)^2} = \infty$ بنابراین حد وجود ندارد								
3. اگر حدود چپ و راست برابر نباشند میگوییم حد نداریم.	مثال 1 $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$ مثال 2 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \geq 1 \\ x - 1 & x < 1 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ و $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$									
4. اگر حد تابع مقدار مشخصی نگردد. این حالت با حالت 2 متفاوت است مثلاً $\sin \infty$ با وجود محدود بودن $\sin x$ بین منفی یک و یک، قطعا به عدد حقیقیه ولی مقدار مشخصی نیست. میگی نه تو پگو چنده؟	$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = \sin \infty = \text{ن.ت.}$									

حد در پی نهایت:

اصلا بد به دلتون راه ندید مطلب بسیار ساده است ولی قبلش پروید یک نیم نگاهی به نمودار توابع مهم بیاندازید.

اصل ماجرا اینه که ما حالا حد تابع رو در نقطه a بررسی می‌کردیم ولی الان می‌خوایم ببینیم اگر تابع مورد نظر به همین فرمون پره جلو چه اتفاقی می‌افته؟ به عبارتی حد تابع در پی نهایت چی میشه؟

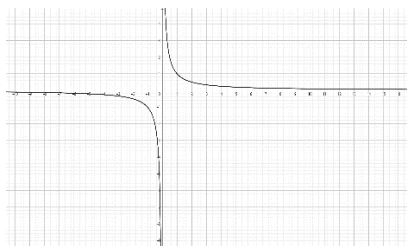
در تابع $f(x) = x^2$ اگر متغیر x به همین روال افزایش یابد $f(x)$ میل میکند به ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 = +\infty$$

در تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ اگر متغیر x رو همین فرمون زیاد و زیاد تر بشه $f(x)$ میل میکند به 0 .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$$



موارد زیر را از روی نمودار این توابع هم میتون فهمید. تحلیل و رسم شک به عنوان یک تمرین

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2 x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\frac{1}{5}} x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} 5^x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x = 0^+$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{5}} x = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_2 x = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0^+$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$

هم ارزی ها؛ تا حالا به گوشتون خورده که یک نفر به جای دیگری رفته سر جلسه کنکور یا امتحان رانندگی؛ بحث هم ارزی هم دقیقاً همینیه اما اینجا به جای آدم ها با توابع سر و کار داریم

پیششید سو، تفاهم نشه؛ اون دوتا آدم متقلب که جاشون رو باهم عوض کردن کلا که با هم عوض نمیشن، جابجایشون فقط برای امتحان کنکور و آزمون شهری رانندگیه. در مورد توابع هم ارز هم دوتا تابع فقط در نزدیکی نقاط صفر و ∞ جا به جا میشوند.

هم ارزی چند جمله ای ها $x \rightarrow 0$	وقتی $x \rightarrow 0$ ((ایکس به صفر میل میکند)) هر چند جمله ای هم ارز جمله ای است که کمترین توان را دارد.	$2x^4 + 3x^2 - 8x \sim -8x$ $x^3 - 2x^2 + 20 \sim 20$ $-9x^4 + 3x^2 + x^3 \sim x^2$
هم ارزی چند جمله ای ها $x \rightarrow \infty$	وقتی $x \rightarrow \infty$ ((ایکس به بی نهایت میل میکند)) هر چند جمله ای هم ارز جمله ای است که بیشترین توان را دارد.	$2x^4 + 3x^2 - 8x \sim 2x^4$ $x^3 - 2x^2 + 20 \sim x^3$ $-9x^4 + 3x^2 + x^3 \sim -9x^4$
هم ارزی مثلثاتی وقتی عبارت جلوی تابع مثلثاتی به صفر میل میکنه $u(x) \rightarrow 0$	$\sin u(x) \sim u(x)$ $\tan u(x) \sim u(x)$ $\sin u(x) \sim 1 - \frac{u(x)^2}{2}$	اگر $x \rightarrow 0$ آنگاه $\sin 5x^7 \sim 5x^7$ $x \rightarrow 2 \Rightarrow \tan(x^2 - 4) \sim (x^2 - 4)$ $x \rightarrow 6 \Rightarrow \cos(x - 6) \sim 1 - \frac{(x - 6)^2}{2}$
هم ارزی رادیکالی	$\sqrt[n]{a_n x^n + b x^{n-1} + \dots} \sim \sqrt[n]{a} (x + \frac{b}{na})$	$x \rightarrow +\infty \quad \sqrt[6]{3x^6 + 4x^5 + 2} \sim \sqrt[6]{3} (x + \frac{5}{18})$

حالت های مبهم؛ صورت های $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ و $0 \times \infty$ و $\infty - \infty$ را مبهم گوییم.

اگر صورت کسری کوچک شود ولی مخرج عدد ثابتی باشد کل کسر کوچک میشود $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{5} = 0$

اگر مخرج کسری کوچک شود ولی صورت عدد ثابتی باشد کل کسر بزرگ میشود $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{x} = \infty$

اگر همزمان هم صورت کوچک گردد و هم مخرج حالت مبهم بوجود می آید. مبهم $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x}$

$\frac{0}{0}$		$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$ $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = 2$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$
	1. اگر صورت و مخرج چند جمله ای باشند باید صورت و مخرج را بر (x-a) که عامل ابهام است تقسیم کنیم. در این مرحله لازم است تجزیه به روش فاکتورگیری، اتحاد مزدوج و اتحاد جمله مشترک را بلد باشید.	$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^3 + 3x^2} = \frac{0}{0}$ $= \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x + 3)(x + 2)}{x^2(x + 3)} = \frac{-1}{9}$
		$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$ $= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x = 2$
	2. اگر تابع مثلثاتی باشد میتوان به کمک فرمول های مثلثاتی یا هم ارزی های مثلثاتی عبارت جدیدی نوشت و عامل ابهام را از صورت و مخرج حذف نمود	از اتحاد مزدوج استفاده میکنیم $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x - 1}{\sin x - 1} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$ $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x - 1)(\sin x + 1)}{\sin x - 1}$ $= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + 1)}{1} = 2$
		در صورت از هم ارزی استفاده میکنیم $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \tan 3x}{5x} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{5x} = \frac{4}{5}$
		در صورت از هم ارزی و در مخرج از اتحاد مزدوج استفاده میکنیم $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x - \pi)}{x^2 - \pi^2} = \frac{0}{0} \text{ مبهم}$ $= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)}{(x - \pi)(x + \pi)}$ $= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{(x + \pi)} = \frac{1}{2\pi}$

$\frac{\infty}{\infty}$	اگر تابع چند جمله ای باشد آنگاه از هم ارزی های پی نهایت استفاده میکنیم	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 4x + 1}{4x^3 + x^2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ مبهم}$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3}{4x^3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
		$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^2 - 4x - 100}{2x^3 + 3x^2} = \frac{\infty}{\infty} \text{ مبهم}$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7x^2}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7}{2x} = 0$
		$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 7\sqrt{x}}{x + 4} = \frac{\infty}{\infty} \text{ مبهم}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2}{x} = 5x = +\infty$
$0 \times \infty$	باید آنرا به حالت $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کنیم حال یا عامل پی نهایت به صورت صفر در مخرج ظاهر میشود یا عامل صفر به صورت پی نهایت در مخرج.	$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{x - \pi} \sin(x - \pi) = \infty \times 0 \text{ مبهم}$ $= \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{x - \pi} = 1$
		$\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 1) \sin\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) = \infty \times 0 \text{ مبهم}$ $\lim_{x \rightarrow \pi} 2x \frac{x}{x^2} = 2$
$\infty - \infty$	کافی است با مخرج مشترک گیری حالت ابهام را به یکی از موارد بالا تبدیل کنیم	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} - \frac{3}{5\sqrt{x}} = \infty - \infty \text{ مبهم}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10\sqrt{x} - 3x}{5x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{10\sqrt{x}}{5x\sqrt{x}} = +\infty$

پیوستگی: چپز چپیدی نیست همون حد چپ و راست هست منتهی باید با مقدار تابع در اون نقطه برابر بشه.

تابع f با دامنه D_f را در نظر بگیرید این تابع را در نقطه x_0 پیوسته گوییم هرگاه 1. تابع در نقطه x_0 حد داشته باشد ($\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ موجود باشد) 2. حد تابع در این نقطه با مقدار تابع برابر باشد 3. اگر فقط حد راست با مقدار تابع برابر بود میگوییم تابع پیوستگی راست دارد. 4. اگر فقط حد چپ با مقدار تابع برابر بود میگوییم تابع پیوستگی چپ دارد. ** در سوالات این بخش شما باید 3 تا کار انجام دهید یکبار حد چپ یکبار حد راست و یکبار مقدار تابع را محاسبه کنی و بعد این سه رو با هم مقایسه کنی.		
مثال: پیوسته	در نقطه $x=0$ بررسی شود $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$ $f(0) = 1$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 1$	در نقطه $x=1.5$ بررسی شود $f(x) = [x]$ $\lim_{x \rightarrow 1.5} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1.5} [x] = 0$ حد چپ و راست را جداگانه حساب کردم برابر بود. $f(1.5) = [1.5] = 0$ $\lim_{x \rightarrow 1.5} f(x) = f(1.5) = 0$ تابع $[x]$ در هر نقطه غیر صحیح پیوسته و در هر نقطه صحیح فقط پیوستگی راست دارد.
مثال: فقط از راست پیوسته	در نقطه $x=2$ بررسی شود $f(x) = \begin{cases} 3x & x < 2 \\ 2x & x = 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3x = 6$ $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4$ چون فقط حد راست در نقطه 2 با $f(2) = 2 \times 2 = 4$ مقدار تابع برابر است فقط پیوستگی راست داریم	$f(x) = \begin{cases} \cos x & x < \frac{\pi}{6} \\ \frac{1}{2} & x = \frac{\pi}{6} \\ \sin x & x > \frac{\pi}{6} \end{cases}$ تمرین: در نقطه $x = \frac{\pi}{6}$ بررسی گردد.
مثال: فقط از چپ پیوسته	$f(x) = \begin{cases} \tan x & x < \frac{\pi}{4} \\ 1 & x = \frac{\pi}{4} \\ \frac{8x}{\pi} & x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$	در نقاط صحیح $f(x) = [-x]$

تعریف حدی مشتق:

فرض کنیم تابع $f(x)$ در یک بازه باز حول نقطه تعریف شده باشد، گوییم $f(x)$ در مشتق پذیر است اگر حد زیر موجود باشد. (بی نهایت نباشد) مقداری معلوم باشد.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

مثال: با استفاده از تعریف، مشتق تابع زیر را بدست آورید.

$$f(x) = 3x^2 - 1$$

$$f(x+h) = 3(x+h)^2 - 1 = 3(x^2 + 2xh + h^2) - 1 = 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 1$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{6xh + 3h^2}{h} = \frac{h(6x + 3h)}{h} = 6x + 3h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h) = 6x = f'(x)$$

$$h \rightarrow 0$$

مشتق تابع در یک نقطه

تعریف: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی نقطه a تعریف شده باشد. اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ موجود باشد،

آن را مشتق تابع f در a نامیده و با $f'(a)$ یا $\frac{\partial f}{\partial x} \big|_{x=a}$ نمایش می دهند. در این صورت گوییم، تابع f در a مشتق

پذیر است و در غیر این صورت (حد بالا موجود نباشد)، گوییم f در a مشتق پذیر نیست.

توجه: مشتق تابع در یک نقطه را به شکل دیگری نیز می توان نوشت. فرض کنیم که $a + h = x$ پس $h = x - a$ و

لذا

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \rightarrow f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

تمرین: مشتق تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در نقطه $x = 9$ به دست آورید.

حل:

$$f'(9) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(9+h) - f(9)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+h} - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+h} - 3}{h} \times \frac{\sqrt{9+h} + 3}{\sqrt{9+h} + 3}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} \times \frac{1}{\sqrt{9+h} + 3} = \frac{1}{\sqrt{9+0} + 3} = \frac{1}{6}$$

Activate Windows
Go to Settings to act

مثال ۱: مشتق تابع $f(x) = \frac{(x^2-1)\sqrt[3]{5x-4}}{x^4+x^2+1}$ در نقطه‌ی $x=1$ کدام است؟

با استفاده از تعریف مشتق تابع f در $x=1$ ، می‌توان نوشت:

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{(x^2-1)\sqrt[3]{5x-4}}{x^4+x^2+1} - 0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)\sqrt[3]{5x-4}}{x^4+x^2+1} = \frac{2}{2}$$

تابع مشتق توابع زیر را به کمک تعریف تابع مشتق به دست آورید.

$$f(x) = \sqrt{x} \quad (آ)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$f(x) = x^2 \quad (ب)$$

حل : به عنوان تمرین

همان‌طور که در مثال قبل دیدید، محاسبه‌ی تابع مشتق یک تابع به کمک تعریف، کار ساده‌ای نیست و در برخی مواقع کاری مشکل و طاقت‌فرسا است. لذا برای محاسبه‌ی مشتق توابع از فرمول‌ها و قواعد زیر که همگی از تعریف تابع مشتق مانند مثال قبل به‌دست می‌آیند، استفاده می‌کنیم. (در قواعد زیر منظور از u ، تابعی برحسب x است.)

مثال	مشتق	تابع
$y = 3 \Rightarrow y' = 0$	$y' = 0$	$y = a$
$y = 7x \Rightarrow y' = 7$	$y' = a$	$y = ax$
$y = 2x^3 \Rightarrow y' = 2 \times 3 \times x^2$	$y' = anx^{n-1}$	$y = ax^n$
$y = 3x^2 - 5x + 7 \Rightarrow y' = 6x - 5$	$y' = u' \pm v' \pm \dots$	$y = u \pm v \pm \dots$
$y = (3x^4)(\sin x) \Rightarrow y' = (12x^3)\sin x + (\cos x).3x^4$	$y' = u'.v + v'.u$	$y = u.v$
$y = 5\cos \Rightarrow y' = -5\sin x$	$y' = au'$	$y = au$
$y = \frac{3x^2}{\tan x} \Rightarrow y' = \frac{6x(\tan x) - (1 + \tan^2 x)3x^2}{\tan^2 x}$	$y' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}$	$y = \frac{u}{v}$
$y = \frac{\cot x}{5} \Rightarrow y' = \frac{-(1 + \cot^2 x)}{5}$	$y' = \frac{u'}{a}$	$y = \frac{u}{a}$
$y = \frac{3}{x^5} \Rightarrow y' = \frac{-3(5x^4)}{x^{10}} = \frac{-15}{x^6}$	$y' = \frac{-au'}{u^2}$	$y = \frac{a}{u}$
$y = \frac{3x+5}{2x-7} \Rightarrow y' = \frac{21-10}{(2x-7)^2} = \frac{-31}{(2x-7)^2}$	$y' = \frac{ad-bc}{(cu+d)^2} u'$	$y = \frac{au+b}{cu+d}$
$y = 5(\sin^2 x) \Rightarrow y' = 4 \times 5 \times \cos x \times \sin^3 x$	$y' = m.au'.u^{m-1}$	$y = au^m$
$y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{u}$
$y = \sqrt[5]{x^3} \Rightarrow y' = \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$	$y' = \frac{mu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$	$y = \sqrt[m]{n^n}$
$y = x^2 + x \Rightarrow y' = \frac{(2x+1)(x^2+x)}{ x^2+x }$	$y' = \frac{u'.u}{ u }$	$y = u $
$y = -3\sin(2x^3+5) \Rightarrow y' = (-3)(6x^2)\cos(2y^3+5) = -18x^2\cos(2x^3+5)$	$y' = au'\cos u$	$y = a\sin u$
$y = 3\cos(\sqrt{x}) \Rightarrow y' = -(3)(\frac{1}{2\sqrt{x}}).\sin \sqrt{x}$	$y' = -au'\sin u$	$y = a\cos u$
$y = 3\tan(\cos) \Rightarrow y' = 3(-\sin x)(1 + \tan^2(\cos x))$	$y' = au'(1 + \tan^2 u)$	$y = a\tan u$
$y = 5\cot x \Rightarrow y' = -5(1 + \cot^2 x)$	$y' = -au'(1 + \cot^2 u)$	$y = a\cot u$
$y = 2\sin^3(x^5) \Rightarrow y' = (2 \times 3)(5x^4)(\cos(x^5))\sin^2(x^5)$	$y' = mau'\cos u \sin^{m-1} u$	$y = a\sin^m u$

دستورها و قضیه های مشتق گیری

۱- اگر c یک عدد ثابت و $f(x)=c$ ، آن گاه داریم $f'(x) = 0$

مثال: $y = 8 \rightarrow y' = 0$

۲- اگر $y=f(x) = x^n$ ، آن گاه $y'=f'(x) = nx^{n-1}$

مثال: $y = x^6 \rightarrow y' = 6x^5$

۳- اگر $f(x)$ تابعی مشتق پذیر و a عددی ثابت و $y=af(x)$ آن گاه: $y'=(af(x))' = af'(x)$

مثال: $y = -5x^7 \rightarrow y' = -5(7x^6) = -35x^6$

۴- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر و $y=f(x) + g(x)$ ، آن گاه: $y'=f'(x) + g'(x)$

مثال: $y = 3x^5 - 5x^2 \rightarrow y' = 15x^4 - 10x$

۵- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر و $y=f(x)g(x)$ ، آن گاه: $y'=f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$

مثال: $y = (3x - 2)(x^2 + 1) \rightarrow y' = 3(x^2 + 1) + 2x(3x - 2) = 9x^2 - 4x + 3$

۶- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر باشند و $g(x) \neq 0$ و $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ آن گاه داریم:

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$$

مثال: $y = \frac{1}{x^2}, x \neq 0 \rightarrow y' = \frac{(x^2)^{-1} - 2x(1)}{(x^2)^2} = \frac{-2}{x^3}$

Activat
Go to Set

مشتق تابع مرکب

۷- اگر $y=f(u)$ و $u=g(x)$ دو تابع مشتق پذیر باشند آن گاه y نسبت به x دارای مشتق است.

اگر مشتق y نسبت به u را با y'_u و مشتق y نسبت به x را با y'_x نشان می دهیم . داریم :

$$y'_x = y'_u \cdot u'(x) = f'(u)g'(x)$$

مثال: $y = (x^4 - 3x^2 + 1)^3 \rightarrow y' = 3(x^4 - 3x^2 + 1)^2 (4x^3 - 6x)$

نتیجه: اگر $y = u^n$ و u تابعی از x باشد ، خواهیم داشت :

$$y'_x = nu' u^{n-1}$$

۸- اگر $f(x)$ تابعی مشتق پذیر و مثبت باشد و $y = \sqrt{f(x)}$ ، آن گاه : $y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$, $(f(x) > 0)$

Activate Window
Go to Settings to activate

مثال : مشتق $y = \sqrt{x}$ برابر است با $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

تمرین ۱۱ : مشتق توابع زیر را به دست آورید . (ساده کردن الزامی نیست) (سوال ۱۳ نهایی خرداد ۹۰)

الف) $g(x) = (x^5 - 3x)(x + 1)^4$ ب) $\sin^3\left(\frac{x}{2}\right) - \cot x$

تمرین ۱۲ : مشتق تابع $y = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ را به دست آورید و دامنه ی مشتق پذیری آن را مشخص کنید .

(سوال ۱۳ نهایی خرداد ۹۰)

تمرین ۱۳ : مشتق توابع زیر را به دست آورید . (ساده کردن الزامی نیست) (سوال ۱۲ نهایی شهریور ۹۱)

الف) $f(x) = (x + 1)(2x + 7)^3$

ب) $g(x) = 3\sin^2 5x - 4\tan x$

مثال ۱۶: مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$f(x) = x\sqrt{x-1} \quad (آ) \quad f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} + x}{x^2 + 2} \quad (ب)$$

پاسخ:

$$f'(x) = \sqrt{x-1} + \frac{x}{2\sqrt{x-1}} \quad (آ)$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + 1\right)(x^2 + 2) - 2x(\sqrt[3]{x} + x)}{(x^2 + 2)^2} \quad (ب)$$

۱) مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$1) \quad y = \sin^5 x \quad \rightarrow \quad y' = 5 \cos x \sin^4 x$$

$$2) \quad y = (tgx + \cos x)^3 \quad \rightarrow \quad y' = 3(\sec^2 x - \sin x)(tgx + \cos x)$$

$$3) \quad y = tg(\sin x) \quad \rightarrow \quad y' = \cos x \cdot \sec^2(\sin x)$$

$$4) \quad y = \sin(\sin x) \quad \rightarrow \quad y' = \cos x \cdot \cos(\sin x)$$

$$5) \quad y = \cos^2(\sin 3x) \quad \rightarrow \quad y' = -6 \sin 3x \cdot \sin(\sin 2x) \cos(\sin 3x)$$

$$6) \quad y = 5 \sin(\cos 4x) \quad \rightarrow \quad y' = -20 \sin 4x \cos(\cos 4x)$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad y &= \frac{2 \cos x - 1}{\cos x + 3} & \rightarrow y' &= \frac{-2 \sin x (\cos x + 3) + \sin x (2 \cos x - 1)}{(\cos x + 3)^2} \\
 & & &= \frac{-7 \sin x}{(\cos x + 3)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad y &= \frac{\sin x}{\cos x - \sin x} & \Rightarrow y' &= \frac{\cos x (\cos x - \sin x) + \sin x (\sin x + \cos x)}{(\cos x - \sin x)^2} \\
 & & &= \frac{1}{(\cos x - \sin x)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad y &= \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} & \Rightarrow y' &= \frac{\cos x (1 - \sin x) + \cos x (1 + \sin x)}{(1 - \sin x)^2} \\
 & & &= \frac{2 \cos x}{(1 - \sin x)^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 10) \quad y &= \frac{\tan x - 1}{\tan x + 1} & \rightarrow y' &= \frac{\sec^2 x (\tan x + 1) - \sec^2 x (\tan x - 1)}{(\tan x + 1)^2} \\
 & & &= \frac{2 \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2}
 \end{aligned}$$

Activate

مشتق توابع نمایی و لگاریتمی

به کمک تعریف مشتق می‌توان مشتق توابع نمایی و لگاریتمی را به دست آورد که به صورت زیر هستند:

$$y=e^x \Rightarrow y'=e^x$$

$$y=\ln x \Rightarrow y'=\frac{1}{x} \quad (x>0)$$

البته واضح است که اگر u تابعی از x باشد، می‌توان روابط زیر را نوشت:

$$y=e^u \Rightarrow y'=u'e^u$$

$$y=\ln u \Rightarrow y'=\frac{u'}{u} \quad (u>0)$$

مثال: • مشتق تابع $y=e^{2x}$ به صورت $y'=2e^{2x}$ و مشتق تابع $y=\ln(\sqrt{x}+1)$ به صورت $y'=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1}$ است.

تست ۹: در تابع $y=x \ln x$ مقدار مشتق به ازای $x=e$ کدام است؟

۱+e (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

پاسخ: مشتق تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$y=x \ln x \Rightarrow y'=\ln x + x\left(\frac{1}{x}\right)=1+\ln x$$

با جایگذاری $x=e$ داریم:

$$y'(e)=1+\ln e=1+1=2$$

بنابراین گزینه‌ی (۳) درست است.

۱۱- مشتق تابع $h(x)=e^{\cos x}$ کدام است؟

$e^{\sin x} \cdot \cos x$. ۴

$-e^{\sin x} \cdot \cos x$. ۳

$-e^{\sin x}$. ۲

$-e^{\cos x} \cdot \sin x$. ۱

مشتق توابع زیر را به دست آورید.



الف) $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x}{x^2 + 1}}$

ب) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + x + 1)^2}$

پ) $f(x) = \sin(\cos x)$

ت) $f(x) = \sin \sqrt[3]{x}$

ث) $f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$

حل :

$$\text{الف) } f'(x) = \frac{(1)(x^2 + 1) - (x^2)(x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{4(x^2 + 1)^2 \sqrt[4]{\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)^2}}$$

$$\text{ب) } f'(x) = \frac{2(2x + 1)}{3\sqrt[3]{(x^2 + x + 1)}}$$

$$\text{پ) } f'(x) = (-\sin x) \cos(\cos x)$$

$$\text{ت) } f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \cos \sqrt[3]{x}$$

مشتق ضمنی

اگر در تابعی y بر حسب x بیان شده باشد، مانند $y = x^2 + x$ ، گوئیم y تابعی صریح بر حسب x است. اما گاهی رابطه‌ای مانند $x^3 + y^3 = xy$ داریم که در آن y بر حسب x به صورت ضمنی بیان می‌شود. در این رابطه‌ها y ممکن است تابعی از x باشد یا نباشد. ولی به هر حال می‌توان مشتق y بر حسب x را محاسبه کرد که به آن مشتق‌گیری ضمنی می‌گوئیم. مشتق‌گیری ضمنی فرقی با مشتق‌گیری معمولی ندارد. فقط فرض می‌کنیم y تابعی مشتق‌پذیر بر حسب x است و از طرفین رابطه‌ی داده شده، نسبت به x مشتق می‌گیریم.

روش سریع برای محاسبه‌ی مشتق ضمنی

اگر $F(x, y) = 0$ رابطه‌ای باشد که در آن تابع y به طور ضمنی بر حسب x بیان شده باشد، مشتق y نسبت به x را می‌توان از رابطه‌ی زیر به دست آورد،

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

که در این رابطه F'_x مشتق F است وقتی که x را متغیر مستقل و y را عدد ثابت فرض کنیم و F'_y مشتق F است وقتی که y را متغیر مستقل و x را عدد ثابت فرض کنیم.

مثال: • در رابطه‌ی $x^3 + y^3 = xy + 3$ داریم:

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - xy - 3$$

$$\begin{cases} F'_x = 3x^2 + 0 - y - 0 \\ F'_y = 0 + 3y^2 - x - 0 \end{cases} \Rightarrow y' = -\frac{3x^2 - y}{3y^2 - x}$$

تست ۴، در رابطه‌ی $\sin(xy) - \cos(xy) = y$ مقدار y' در نقطه‌ی $(\frac{\pi}{2}, 1)$ چقدر است؟

$$\frac{2}{2-\pi} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{2-\pi} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{\pi-2} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{\pi-2} \quad (۱)$$

پاسخ: با استفاده از فرمول مربوط به محاسبه‌ی مشتق ضمنی $(y' = \frac{-F'_x}{F'_y})$ داریم:

$$F(x, y) = \sin(xy) - \cos(xy) - y = 0$$

$$y' = -\frac{y \cos(xy) + y \sin(xy)}{x \cos(xy) + x \sin(xy) - 1} \Rightarrow y'(\frac{\pi}{2}, 1) = -\frac{0+1}{0+\frac{\pi}{2}-1} = \frac{2}{2-\pi}$$

بنابراین گزینه‌ی (۴) درست است.

Activate Windows

مثال ۱ به کمک مشتق گیری ضمنی مشتق هر یک از روابط زیر را حساب کنید.

$$xy^2 + ye^{2-x} = 1 \quad (۱)$$

$$-\left(\frac{y^2 + y(-1)e^{2-x}}{2xy + e^{2-x}}\right)$$

$$\frac{e^y}{e^x} + e^{xy} - x - 4 = 0 \quad (۲)$$

$$e^y e^{-x} + e^{xy} - x - 4 = 0 \Rightarrow -\left(\frac{(-1)e^{-x}e^y + ye^{xy} - 1}{e^y e^{-x} + xe^{xy}}\right)$$

$$x \cos y + y \sin x = 0 \quad (۳)$$

$$-\left(\frac{\cos y + y \cos x}{(-x) \sin y + \sin x}\right)$$

(2) در هر مورد $y' = \frac{dy}{dx}$ را بیابید.

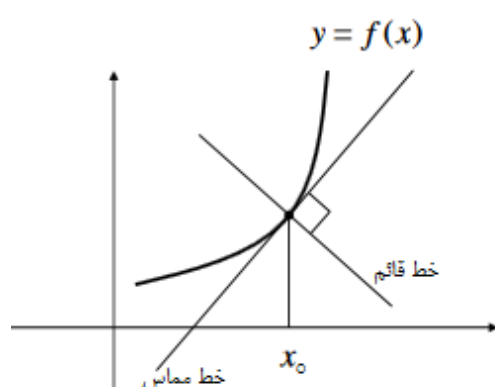
$$1) \quad x \sin y + y \sin x = xy \quad y' = -\frac{\sin y + y \cos x - y}{x \cos y + \sin x - x}$$

$$2) \quad y = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{16} \quad y' = -\frac{\frac{2}{3}\sqrt[3]{x}}{\frac{2}{3}\sqrt[3]{y}} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}}$$

$$3) \quad y\sqrt{x} - x\sqrt{x} = 5 \quad y' = -\frac{\frac{y}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{y - 3x}{4x}$$

$$4) \quad x^2 y + \sin^2 y = y \quad y' = \frac{2xy}{x^2 + \sin 2y - 1}$$

☑ معادله ی خط مماس و خط قائم بر منحنی از نقطه ی روی منحنی



اگر $y = f(x)$ یک تابع باشد، خط مماس بر منحنی نمایش نمودار آن خطی است که فقط در نقطه ی x_0 نمودار تابع را قطع کند.

خط قائم خطی است که در نقطه ی x_0 بر خط مماس بر منحنی در این نقطه عمود باشد.

با توجه به تعبیر هندسی مشتق واضح است که مشتق تابع $y = f(x)$ در نقطه ی x_0 با شیب خط مماس بر منحنی در این نقطه برابر است.

$$m = f'(x_0) \text{ شیب خط مماس}$$

بدیهی است که اگر شیب خط مماس را عکس و قرینه کنیم، شیب خط قائم بدست می آید.

$$m' = \frac{-1}{f'(x_0)} \text{ شیب خط قائم}$$

تمرین: شیب خط مماس بر تابع $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x}$ را در $x_0 = 1$ نقطه ی بدست آورید.

تمرین: معادله ی خط مماس و معادله ی خط قائم بر منحنی تابع $y = \tan^2 x$ را در نقطه ی $x_0 = \frac{\pi}{4}$ بدست آورید.

تمرین برای حل :

۱: شیب خط مماس بر منحنی نمودار تابع $y = \sqrt{x+1}$ را در نقطه ی $x_0 = 3$ را به دست آورید.

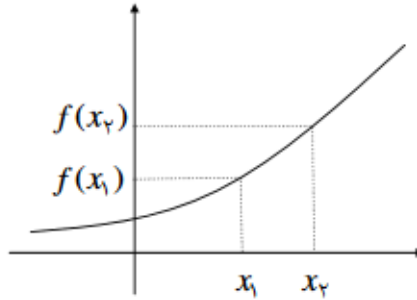
۲: معادله ی خط مماس و معادله ی خط قائم بر منحنی تابع $y = x^2 + 3x - 1$ را در نقطه ی 1 به طول یک واقع بر نمودار آن به دست آورید.

تابع $y = f(x)$ را در یک فاصله مانند $I \subseteq D_f$ صعودی گویند، هرگاه

$$\forall x_1, x_2 \in I; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

توجه: تابع $y = f(x)$ را در یک فاصله مانند $I \subseteq D_f$ صعودی اکید (اکیداً صعودی) گویند، هرگاه

$$\forall x_1, x_2 \in I; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

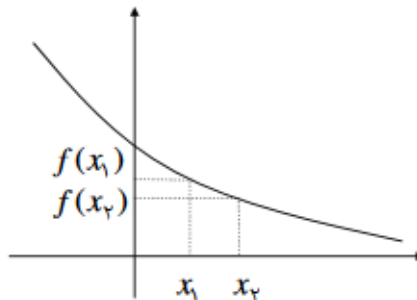


تابع $y = f(x)$ را در یک فاصله مانند $I \subseteq D_f$ نزولی گویند، هرگاه

$$\forall x_1, x_2 \in I; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

توجه: تابع $y = f(x)$ را در یک فاصله مانند $I \subseteq D_f$ نزولی اکید (اکیداً نزولی) گویند، هرگاه

$$\forall x_1, x_2 \in I; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$



Activate V
Go to Setting

با توجه به تعریف تابع صعودی و تابع نزولی و با در نظر گرفتن تعریف مشتق واضح است که یک تابع مانند $y = f(x)$ در یک فاصله مانند $I = (a, b)$ صعودی است هرگاه در این فاصله مشتق آن مثبت باشد و برعکس و همچنین در این فاصله تابع نزولی است، هرگاه مشتق آن منفی باشد و برعکس.

توجه: اگر در یک فاصله مشتق تابع صفر باشد، تابع در این فاصله ثابت است و برعکس

برای تعیین صعودی یا نزولی بودن تابع در یک فاصله کافی است مشتق آنرا تعیین علامت کنیم و جدولی مانند جدول زیر موسوم به جدول تغییرات (جدول رفتار) تابع رسم کنیم.

x	$-\infty$	ریشه های مشتق	$+\infty$
y'		علامت مشتق	
y			

توجه: جهت تعیین نماد متناظر با $+\infty$ یا $-\infty$ برای y در جدول تغییرات، کافی است از تابع وقتی که $x \rightarrow +\infty$ یا $x \rightarrow -\infty$ حد بگیریم.

تمرین: صعودی یا نزولی بودن توابع زیر را به کمک رسم جدول تغییرات بررسی کنید.

۱) $y = -3x + 1$

۲) $y = -x^2 + 4x$

۳) $y = x^3 - 3x$

مشخص کنید که تابع f با ضابطه $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 7$ در چه فاصله ای صعودی اکید و در چه فاصله ای نزولی اکید است.

حل :

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2) \xrightarrow{f'(x)=0} (x+1)(x-2) = 0 \rightarrow x = -1, x = 2$$

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
y'	$+$	$.$	$-$	$.$	$+$
y	$+\infty$	$.$		$.$	$+\infty$
		max		min	

تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ در چه بازه ای صعودی اکید و در چه بازه ای نزولی اکید است؟

حل :

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \quad \text{و} \quad D_{f'} = \mathbb{R} - \{0\}$$

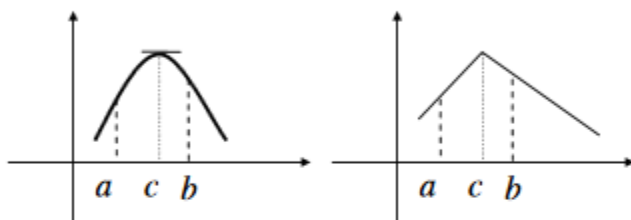
x	$-\infty$	$.$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$.$	$+\infty$

☑ ماگزیم و مینیم یک تابع

تابع $y = f(x)$ که دامنه ی آن D_f باشد را در نظر می گیریم. اگر $I = (a, b) \subseteq D_f$ در این صورت:

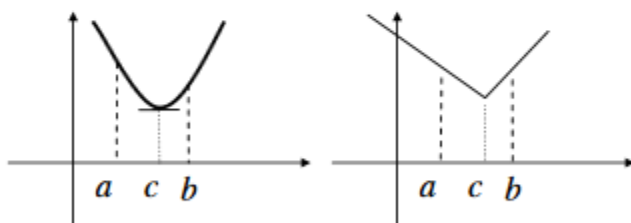
الف) تابع f در نقطه ی $c \in I$ دارای ماگزیم نسبی است، هرگاه $\forall x \in I \rightarrow f(x) \leq f(c)$

ب) تابع f در نقطه ی $c \in I$ دارای ماگزیم مطلق است، هرگاه $\forall x \in D_f \rightarrow f(x) < f(c)$



ج) تابع f در نقطه ی $c \in I$ دارای مینیم نسبی است، هرگاه $\forall x \in I \rightarrow f(x) \geq f(c)$

د) تابع f در نقطه ی $c \in I$ دارای مینیم مطلق است، هرگاه $\forall x \in D_f \rightarrow f(x) > f(c)$



تذکره ۱) ممکن است تابع در یک نقطه ماگزیم یا مینیم داشته باشد ولی در این نقطه مشتق پذیر نباشد.

مانند تابع $y = |x|$ که مبدأ مختصات نقطه ی مینیم آن است ولی در این نقطه مشتق پذیر نیست.

تذکره ۲) اگر در نقطه ی ماگزیم یا مینیم تابع مشتق پذیر باشد، مشتق آن صفر است و خط مماس بر منحنی در این نقطه موازی محور طول ها است.

☑ آزمون مشتق اول

برای تعیین نقاط ماکزیمم یا مینیمم یک تابع از آن مشتق گرفته و ریشه های مشتق را در صورت وجود تعیین می کنیم. اگر مشتق در این ریشه ها تغییر علامت دهد، ریشه های بدست آمده طول نقاط ماکزیمم یا مینیمم را نشان می دهند.

x	x_0		
y'	+	0	-
y	↗	y_0 Max	↘

x	x_0		
y'	-	0	+
y	↘	y_0 Min	↗

همانطور که قبلاً گفته شد جدولی به شکل زیر که در آن نقاط ماکزیمم یا مینیمم و همچنین صعودی یا نزولی بودن تابع مشخص شده باشد را جدول تغییرات تابع می نامند.

x	$-\infty$	ریشه های مشتق	$+\infty$
y'	علامت مشتق	علامت مشتق	علامت مشتق
y			

تمرین: جدول تغییرات تابع های زیر را رسم کنید و نقاط ماکزیمم یا مینیمم آنها را در صورت وجود بدست آورید.

۱) $y = 2x + 1$

۴) $y = (x + 1)^3$

۲) $y = x^2 - 2x - 3$

۵) $y = x^3 + 3x$

۳) $y = x^3 - 3x$

۶) $y = \sin x \quad x \in [0, 2\pi]$

تذکره: اگر در یک نقطه مشتق اول تابع صفر باشد ولی تغییر علامت ندهد، آن نقطه ماکزیمم یا مینیمم نیست.

نتیجه: اگر مشتق اول تابع ریشه نداشته باشد، تابع همواره صعودی یا همواره نزولی خواهد بود.

← مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع f با ضابطه $f(x) = -2x^3 + 3x^2$ را روی بازه $[-\frac{1}{3}, 2]$

بیابید.

حل :

$$D_f = R$$

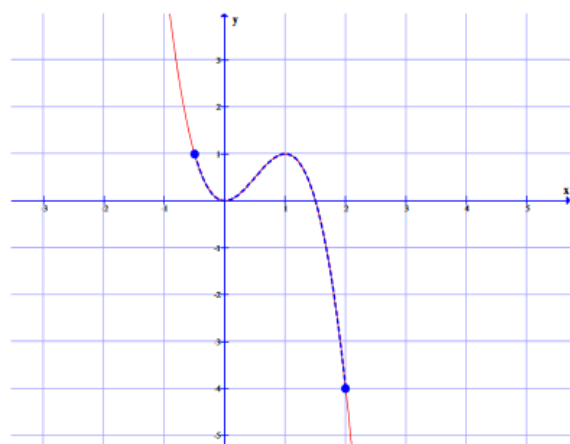
$$f'(x) = -6x^2 + 6x \xrightarrow{f'(x)=0} -3x^2 + 6x = 0 \rightarrow x=0, x=1$$

x	$-\infty$	.	.	.	$+\infty$
y'	-	.	+	.	-
y	$+\infty \searrow$	.	$\nearrow$	.	$\searrow -\infty$
		min		max	

توجه کنید که مقادیر تابع در نقاط انتهایی عبارتند از $f(2) = 4$ و $f(-\frac{1}{3}) = 1$. بنابراین مقدار ماکزیمم تابع برابر ۱ می

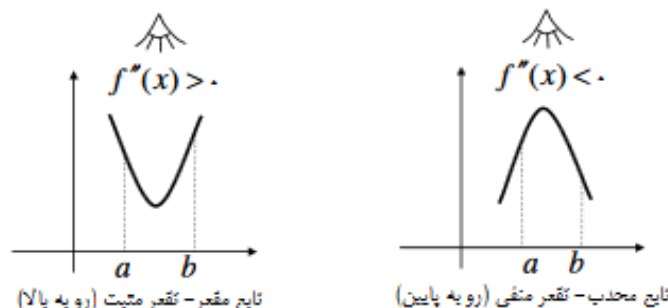
باشد که در نقاط $x = -\frac{1}{3}$ و $x = 1$ رخ می دهد و صفر مقدار مینیمم نسبی تابع است که در نقطه $x = 0$ به دست

می آید. همچنین -4 مقدار مینیمم مطلق تابع است که در نقطه $x = 2$ اتفاق می افتد.



☑️ **تقر و تحدب یک تابع**

فرض کنید که تابع $y = f(x)$ در یک فاصله مانند $I = (a, b)$ تعریف شده باشد. در این صورت تابع را در این فاصله مقعر گویند، هرگاه مشتق دوم آن در این فاصله مثبت باشد و برعکس. همچنین تابع را در این فاصله محدب گویند هرگاه مشتق دوم آن منفی باشد و برعکس.

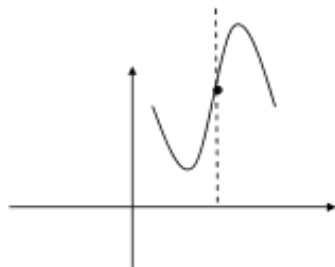


☑️ **آزمون مشتق دوم**

برای تعیین تحدب و تقر یک تابع مشتق دوم آنرا بدست آورده و تعیین علامت می کنیم. توجه کنید که ریشه ی مشتق دوم (به شرط تغییر علامت مشتق دوم در این نقطه) را نقطه ی عطف می نامند.

تمرین: جهت تغییرات و جهت تقر تابع $y = x^3 - 3x$ را رسم کنید.

نتیجه:



۱- در نقطه ی عطف تقر منحنی عوض می شود و خط مماس بر منحنی در این نقطه نمودار تابع را قطع می کند.

۲- ریشه ی ساده ی مشتق اول طول نقاط ماگزیم یا مینیم است ولی ریشه ی مضاعف آن طول نقطه ی ماگزیم یا مینیم نیست بلکه طول نقطه ی عطف است. (چون در این نقطه مشتق اول تغییر علامت نمی دهد).

تمرین: نقاط عطف تابع $y = x^4 - 4x^3$ را به دست آورید.

☞ **تمرین:** تابع $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ با ضابطه ی $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$ روی چه بازه ای صعودی اکید یا نزولی

اکید و روی چه بازه ای نمودار تابع f تقر رو به بالا یا تقر رو به پایین دارد؟

حل :

$$f'(x) = x^2 - 2x - 3 \xrightarrow{f'(x)=0} (x+1)(x-3) = 0 \rightarrow x = -1, x = 3$$

$$f''(x) = 2x - 2 \xrightarrow{f''(x)=0} 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$-$	$+$
y''	$-$	$-$	0	$+$	$+$
y	$+\infty$ ∩	$\nearrow \frac{17}{3}$ max	$\searrow \frac{1}{3}$ عطف	$\searrow -5$ min	$\nearrow +\infty$ ∪

جهت تقعر نمودار تابع f با ضابطه ی $f(x) = x^4 - 4x^3$ را در دامنه اش بررسی نموده و نقاط عطف آن را به دست آورید.

حل :

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 \rightarrow f''(x) = 12x^2 - 24x \xrightarrow{f''(x)=0} 12x(x-2) = 0 \rightarrow x = 0, x = 2$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y''	$+$	0	$-$	$+$
y	$+\infty$ ∪	0 عطف	-16 عطف	$+\infty$ ∪

جهت تقعر نمودار تابع f با ضابطه ی $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x}$ را در دامنه اش بررسی نموده و نقطه ی عطف آن را به دست آورید.

حل :

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0$$

$$f''(x) = \frac{-2}{9x^2\sqrt[3]{x^2}}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y''	$+$	نامعین	$+$
y	$+\infty$ ∪	2 عطف	$+\infty$ ∪

☑ نقاط بحرانی تابع

یک نقطه از دامنه ی تعریف تابع f را نقطه ی بحرانی می نامند، هرگاه یکی از شرایط زیر را داشته باشد.

الف) تابع در این نقطه مشتق پذیر نباشد.

ب) مشتق تابع در این نقطه برابر صفر باشد.

برای تعیین نقاط بحرانی یک تابع، مشتق تابع را بدست آورده و ریشه های صورت و مخرج آن را (اگر عضو دامنه باشند) به عنوان

نقطه ی بحرانی می پذیریم.

در تابع چند ضابطه ای نقاط شکستگی را نیز بررسی می کنیم.

تمرین: نقاط بحرانی توابع زیر را بدست آورید.

$$۱) f(x) = x^3 - 3x$$

$$۴) f(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$$

$$۲) f(x) = \sqrt{2x - 6}$$

$$۵) f(x) = |x - 2|$$

$$۳) f(x) = \sqrt{4x - x^2}$$

$$۶) f(x) = ||x| - 1|$$

نتیجه:

۱- نقاط ابتدایی و انتهایی نمودار در یک بازه نقاط بحرانی هستند.

۲- نقاط شکستگی یا ناپیوستگی تابع بحرانی هستند.

۳- نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع نیز بحرانی هستند.

نقاط بحرانی تابع f با ضابطه ی $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ را در دامنه اش بیابید.



حل :

$$D_f = [-1, 1]$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

حال ریشه های صورت و مخرج را به دست می آوریم.

ریشه ی صورت $x = 0$ می باشد و چون نقطه ی درونی دامنه است، پس یک نقطه ی بحرانی می باشد.

ریشه های مخرج $x = 1$ و $x = -1$ می باشند و چون نقاط درونی دامنه نمی باشند، پس بحرانی نیستند.

نقاط بحرانی و نقاط اکسترمم مطلق توابع زیر را به دست آورید.



الف) $f(x) = x^3 - 3x + 1$; $-\frac{3}{2} \leq x \leq 3$

حل :

الف :

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = -1$$

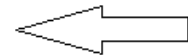
$$x = -1 \rightarrow f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 1 = 3$$

$$x = -\frac{3}{2} \rightarrow f\left(-\frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 1 = \frac{17}{8}$$

$$x = 3 \rightarrow f(3) = (3)^3 - 3(3) + 1 = 19$$

پس نقطه ی $x = 1$ مینیمم و $x = 3$ ماکزیمم و $x = \pm 1$ بحرانی هستند.

جهت تععر منحنی f با ضابطه ی $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ را به کمک قضیه ی تععر بررسی



نموده و نقطه ی عطف تابع را در صورت وجود پیدا کنید.

حل :

$$f(x) = \sqrt[3]{x-1} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \rightarrow f''(x) = \frac{-2}{9(x-1)\sqrt[3]{(x-1)^2}}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y''	+	نامعین	-
y	$-\infty$	$\cup$	$\cap$
		عطف	$+\infty$

جدول رفتار و نمودار تابع $f(x) = 3x^3 - 9x$ را رسم کنید.



حل :

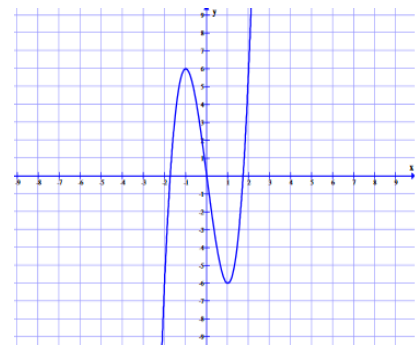
$$f(x) = 3x^3 - 9x$$

$$D_f = R$$

$$f'(x) = 9x^2 - 9 \xrightarrow{f'(x)=0} 9x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	6 max	$\searrow$	0 عطاف	$\searrow$	-6 min	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(x) = 0 \rightarrow 3x^3 - 9x = 0 \rightarrow x = 0, x = \sqrt{3}$$



دیفرانسیل تابع ☒

اگر تابع f در نقطه $x = x_0$ مشتق پذیر باشد، در این صورت $f'(x_0)\Delta x$ را دیفرانسیل تابع در نقطه $x = x_0$ می نامند و آن را با dy یا $df(x_0)$ نمایش می دهند.

$$dy = df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

توجه: مقدار dy به هر دو عامل x_0 و Δx بستگی دارد. Δx را نمو x می نامند.

همچنین دیفرانسیل تابع در هر نقطه از دامنه اش به صورت زیر تعریف می شود.

$$dy = df(x) = f'(x) \cdot dx$$

تمرین: دیفرانسیل تابع $f(x) = \cos 2x$ را در نقطه $x = \frac{\pi}{4}$ وقتی x به اندازه 0.1 نمو کند را پیدا کنید.

حل:

$$df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$$

$$df(x) = -2 \sin 2x \cdot \Delta x$$

$$\xrightarrow{df(x_0)=f'(x_0) \cdot \Delta x} df\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot (0.1) = -2 \times 1 \times 0.1 = -0.2$$

تمرین: نمو تقریبی تابع $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ را در نقطه ی $x = 3$ وقتی x به اندازه ی 0.1 نمو کند را پیدا کنید.
حل:

$$\Delta y \approx df(x) = f'(x) \cdot \Delta x$$

$$\Delta y \approx df(x) = \frac{2x}{3 \times \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}} \cdot \Delta x$$

$$\frac{\Delta y \approx df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x}{\Delta y \approx df(3) = \frac{2(3)}{3 \times \sqrt[3]{(3^2 - 1)^2}} \cdot (0.1) = 0.6 \times 0.1 = 0.06}$$

اگر $y = f(x)$ یک تابع مشتق پذیر باشد.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \rightarrow \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

لذا می توان نوشت: $f'(x) \Delta x = f(x + \Delta x) - f(x)$

در نهایت خواهیم داشت:

$$f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \Delta x$$

این رابطه برای محاسبه ی مقدار تقریبی بسیاری از تساوی های ریاضی بکار می رود.

تمرین: به کمک دیفرانسیل مقدار تقریبی $\sqrt{26}$ را پیدا کنید.

حل: تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را تعریف می کنیم. آنگاه داریم:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ x = 25 \\ \Delta x = 1 \end{cases} \rightarrow f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x) \Delta x$$

$$\sqrt{x + \Delta x} = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \Delta x \rightarrow \sqrt{25 + 1} = \sqrt{25} + \frac{1}{2\sqrt{25}} (1)$$

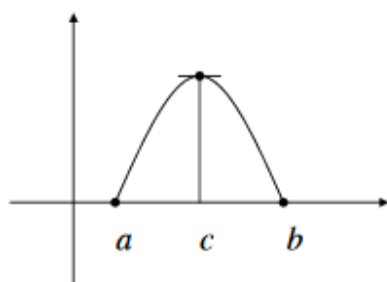
$$\rightarrow \sqrt{26} = 5 + \frac{1}{2(5)} = 5.1$$

تمرین: به کمک دیفرانسیل مقدار تقریبی هر یک از موارد زیر را بیابید.

الف) $\sqrt[3]{10}$

ج) $\cos 58^\circ$

☑ قضیه ی رول



فرض کنیم که تابع f دارای ویژگی های زیر باشد.

اولاً: روی بازه ی $[a, b]$ پیوسته باشد.

ثانیاً: روی بازه ی (a, b) مشتق پذیر باشد.

ثالثاً: $f(a) = f(b) = 0$

در این صورت حداقل یک عدد مانند c واقع بر بازه ی (a, b) وجود دارد بطوری که $f'(c) = 0$ شود، یعنی خط مماس بر منحنی افقی باشد.

نکته ی ۱: اگر شرط ثالثاً را به صورت $f(a) = f(b)$ بنویسیم، باز هم قضیه ی رول درست است.

تمرین: تابع $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ را در نظر بگیرید.

الف: شرایط قضیه ی رول را در بازه ی $[1, 2]$ بررسی کنید.

ب: مقدار مناسبی برای c بیابید که حکم قضیه ی رول را برآورده کند.

حل:

شرط اول: تابع f یک تابع چند جمله ای است و لذا در تمام نقاط و همچنین در فاصله ی $[1, 2]$ پیوسته است.

شرط دوم: تابع f یک تابع چند جمله ای است و لذا در تمام نقاط و همچنین در فاصله ی $(1, 2)$ مشتق پذیر است.

شرط سوم:

$$f(1) = 1^3 - 2(1)^2 - (1) + 2 = 0$$

$$f(2) = 2^3 - 2(2)^2 - (2) + 2 = 0$$

$$\Rightarrow f(1) = f(2) = 0$$

لذا تابع در فاصله ی داده شده هر سه شرط قضیه ی رول را دارد.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1 \xrightarrow{f'(c)=0} 3c^2 - 4c - 1 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = \frac{2 + \sqrt{5}}{3} \quad \text{و} \quad \Rightarrow c_2 = \frac{2 - \sqrt{5}}{3}$$

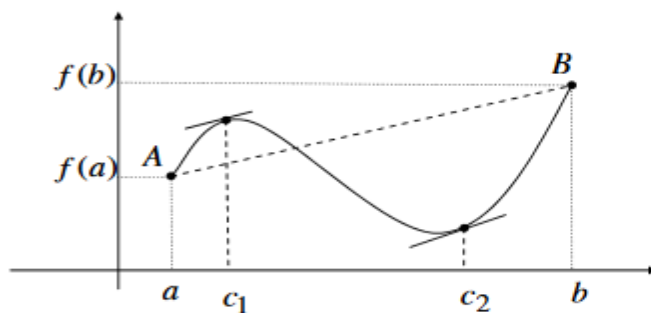
مقدار c_2 در فاصله ی $(1, 2)$ واقع نیست، لذا قابل قبول نیست.

تمرین برای حل :

۱ : نشان دهید که تابع $f(x) = x^4 - 4x^2$ در فاصله ی $[0, 2]$ شرایط قضیه ی رول را دارد. سپس مقدار c را طوری به دست آورید که به ازای آن قضیه ی رول برقرار باشد.

۲ : نشان دهید که تابع $f(x) = x^3 - x$ در فاصله ی $[-1, 0]$ شرایط قضیه ی رول را دارد. سپس مقدار c را طوری به دست آورید که به ازای آن قضیه ی رول برقرار باشد.

☑ قضیه ی مقدار میانگین (قضیه ی لاگرانژ)



تابع f را با شرایط زیر در نظر می گیریم:

اولاً: روی بازه ی $[a, b]$ پیوسته باشد.

ثانیاً: روی بازه ی (a, b) مشتق پذیر باشد.

در این صورت حداقل یک عدد مانند c در بازه

ی (a, b) وجود دارد بطوری که:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

تمرین: در تابع زیر شرایط قضیه ی مقدار میانگین را بررسی کرده و سپس مقدار c را بیابید.

$$f(x) = 2x - x^2 \text{ و } x \in [0, 1]$$

حل: تابع f یک تابع چند جمله ای است، پس به ازاء هر x پیوسته و مشتق پذیر است و شرایط قضیه ی مقدار میانگین را دارد.

$$f(0) = 0, f(1) = 1, f'(x) = 2 - 2x$$

$$f'(c) = 2 - 2c$$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1 - 0 = 1$$

$$\therefore 2 - 2c = 1 \rightarrow c = \frac{1}{2}$$

تمرین برای حل :

۱ : نشان دهید که تابع $f(x) = x^3 + 2x - 1$ در فاصله ی $[0, 1]$ شرایط قضیه ی لاگرانژ (مقدار میانگین) را دارد. سپس مقدار

مناسب c را بدست آورید.

انتگرال

تا به حال روش های متعددی برای محاسبه ی مشتق تابع $f(x)$ ارائه گردید. اما در حل بسیاری از مسائل لازم است که عکس این روند را انجام دهیم. به عبارت دیگر، در این قسمت فرض بر این است که $f'(x)$ داده شده و منظور تعیین تابع $f(x)$ است. فرایند تعیین تابع $f(x)$ از $f'(x)$ را ضد مشتقگیری یا پادمشتق گیری می نامند.

تعریف: تابع $F(x)$ را یک تابع اولیه یا ضدمشتق یا پادمشتق $f(x)$ می نامند، هرگاه به ازای هر x داشته باشیم.

$$F'(x) = f(x)$$

تمرین: یک تابع اولیه برای تابع $f(x) = 3x^2$ به دست آورید.

حل: بنابر تعریف تابع اولیه، چون مشتق هر یک از این توابع زیر برابر $f(x) = 3x^2$ است. پس هر یک از توابع می تواند یک تابع اولیه برای تابع $f(x)$ باشند.

$$F(x) = x^3$$

$$F(x) = x^3 + 1$$

$$F(x) = x^3 - 2$$

$$F(x) = x^3 + \frac{3}{2}$$

$$F(x) = x^3 - \sqrt{5}$$

.....

به طور کلی برای هر عدد حقیقی c می توان نوشت:

$$F(x) = x^3 + c$$

تمرین: یک تابع اولیه برای تابع $g(x) = \sin x$ به دست آورید.

حل: بنابر تعریف تابع اولیه، چون مشتق تابع زیر برابر $g(x) = \sin x$ است. پس این تابع می تواند یک تابع اولیه برای تابع $g(x)$ باشند.

$$G(x) = -\cos x + c$$

تعریف : تابع $F(x)$ را یک تابع اولیه ی $f(x)$ باشد، در این صورت می نویسند:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

و تابع $F(x) + c$ را **انتگرال نامعین** یا به اختصار انتگرال $f(x)$ می نامند.

مثال

$$۱: \int x^5 dx = x^6 + c$$

$$۲: \int \sin x dx = -\cos x + c$$

توجه :

۱: نماد dx دیفرانسیل متغیر x می باشد.

۲: عمل تعیین تابع اولیه را انتگرال گیری می نامند.

۳: اگر تابع f در یک بازه مانند I پیوسته باشد، آنگاه روی این فاصله دارای تابع اولیه و در نتیجه دارای انتگرال است.

ویژگی های انتگرال

۱: انتگرال حاصل ضرب یک عدد در یک تابع با حاصل ضرب آن عدد در انتگرال تابع برابر است.

$$\int k f(x)dx = k \int f(x)dx$$

۲: انتگرال مجموع دو تابع با مجموع انتگرال های آنها برابر است.

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

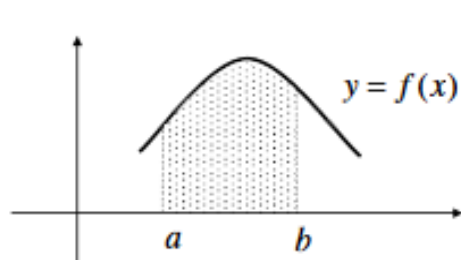
مثال :

$$۱) \int 5 \sin x dx = 5(-\cos x) + c = -5 \cos x + c$$

$$۲) \int (x^5 + \sin x)dx = x^6 - \cos x + c$$

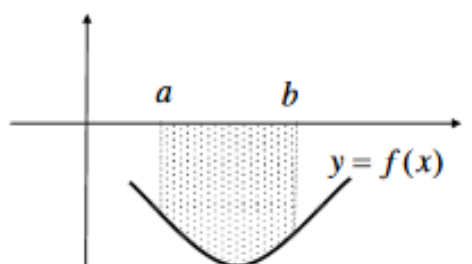
انتگرال معین

فرض کنید که تابع f در بازه $[a, b]$ تعریف شده و پیوسته باشد. **انتگرال معین** تابع f از a تا b که آن را به صورت



$\int_a^b f(x) dx$ نمایش می دهند. به صورت زیر تعریف می کنند.

الف: اگر تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته و نامنفی باشد (نمودار تابع بالای محور x ها باشد)، در این صورت مساحت محدود به منحنی $y = f(x)$ و محور x ها و خطوط $x = a$ و $x = b$ را انتگرال معین تابع f از a تا b می نامند.



ب: اگر تابع f در بازه $[a, b]$ پیوسته و نامنفی باشد (نمودار تابع پایین محور x ها باشد)، در این صورت قرینه ی مساحت محدود به منحنی $y = f(x)$ و محور x ها و خطوط $x = a$ و $x = b$ را انتگرال معین تابع f از a تا b می نامند.

تذکره: عدد a را حد پایین و عدد b را حد بالای انتگرال معین می نامند.

نتیجه: انتگرال معین یک تابع پیوسته در فاصله $[a, b]$ همواره یک عدد حقیقی است. اگر نمودار تابع بالای محور x ها باشد، مقدار انتگرال معین مثبت و اگر پایین محور x ها باشد، مقدار انتگرال را منفی خواهد شد.

رابطه ی بین انتگرال نامعین و انتگرال معین

فرض کنید که تابع f در بازه $[a, b]$ تعریف شده و پیوسته و $F(x)$ یک تابع اولیه ی آن باشد. در این صورت

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

این تساوی به قضیه ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال موسوم است.

نتیجه: برای هر تابع f داریم:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

فرمول های انتگرال گیری

$$۱) \int dx = x + c$$

مثال :

$$\int r dx = rx + c$$

$$۲) \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c \quad n \neq -1$$

مثال :

$$\int \delta x^r dx = \delta \left(\frac{1}{r+1} x^{r+1} \right) + c = \frac{\delta}{r+1} x^{r+1} + c$$

$$۳) \int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = L_n |x| + c$$

مثال :

$$\int \frac{r}{x} dx = r L_n |x| + c$$

تمرین : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \left(r x^r + \frac{\delta}{x} - 1 \right) dx$$

حل :

$$\int \left(r x^r + \frac{\delta}{x} - 1 \right) dx = \frac{r}{r+1} x^{r+1} + \delta L_n |x| - x + c = x^r + \delta L_n |x| - x + c$$

توجه : برای هر عدد حقیقی و غیر صفر a و اعداد طبیعی m و n همواره داریم:

$$\text{الف) } \frac{1}{a^n} = a^{-n} \qquad \text{ب) } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

از این دو تساوی در سهولت استفاده از فرمول های انتگرال (به ویژه توابع کسری و رادیکالی) نیز مورد استفاده قرار می گیرند.

تمرین: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int \frac{\Delta}{x^{\frac{5}{3}}} dx$

ب) $\int \frac{4}{3} \sqrt[3]{x^{\frac{7}{3}}} dx$

ج) $\int (\Delta x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{x} + \sqrt{x} - 12) dx$

حل:

الف) $\int \frac{\Delta}{x^{\frac{5}{3}}} dx = \int \Delta x^{-\frac{5}{3}} dx = \frac{\Delta}{-\frac{5}{3}+1} x^{-\frac{5}{3}+1} + c = \frac{\Delta}{-\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}} + c = \frac{\Delta}{-\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}}} + c$

ب) $\int \frac{4}{3} \sqrt[3]{x^{\frac{7}{3}}} dx = \int \frac{4}{3} x^{\frac{7}{9}} dx = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{7}{9}+1} x^{\frac{7}{9}+1} + c = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{16}{9}} x^{\frac{16}{9}} + c = \frac{12}{16} \sqrt[3]{x^{\frac{16}{3}}} + c$

نتیجه:

۱) $\int \frac{1}{x} dx = L_n |x| + c$

۲) $\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^{\frac{3}{2}}} + c$

تمرین: انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int (x^{\frac{7}{3}} - 3\sqrt{x^{\frac{5}{3}}} + \frac{y}{x^{\frac{7}{3}}} + 1) dx$

ب) $\int (\Delta x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{x} + \sqrt{x} - 12) dx = x^{\frac{5}{3}} + L_n |x| + \frac{2}{3} \sqrt{x^{\frac{3}{2}}} + 12x + c$

حل:

الف) $\int (x^{\frac{7}{3}} - 3\sqrt{x^{\frac{5}{3}}} + \frac{y}{x^{\frac{7}{3}}} + 1) dx = \int (x^{\frac{7}{3}} - 3x^{\frac{5}{6}} + yx^{-\frac{7}{3}} + 1) dx$

$= \frac{1}{\frac{7}{3}} x^{\frac{7}{3}+1} - \frac{3}{\frac{5}{6}+1} x^{\frac{5}{6}+1} + \frac{y}{-\frac{7}{3}+1} x^{-\frac{7}{3}+1} + x + c = \frac{1}{\frac{7}{3}} x^{\frac{10}{3}} - \frac{6}{\frac{11}{6}} \sqrt{x^{\frac{11}{3}}} - \frac{y}{\frac{4}{3}} + x + c$

ب) $\int (\Delta x^{\frac{4}{3}} + \frac{1}{x} + \sqrt{x} - 12) dx = x^{\frac{5}{3}} + L_n |x| + \frac{2}{3} \sqrt{x^{\frac{3}{2}}} + 12x + c$

تمرین : انتگرال های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{-1}^1 (x^2 + 5x) dx$

ب) $\int_1^2 \frac{dx}{x}$

حل :

الف) $\int_{-1}^1 (x^2 + 5x) dx$

$$= \left(x^3 + \frac{5}{2} x^2 \right) \Big|_{-1}^1 = \left((1)^3 + \frac{5}{2} (1)^2 \right) - \left((-1)^3 + \frac{5}{2} (-1)^2 \right) = 1 + \frac{5}{2} + 1 - \frac{5}{2} = 2$$

ب) $\int_1^2 \frac{dx}{x} = L_n x \Big|_1^2 = (L_n 2) - (L_n 1) = (L_n 2) - (.) = L_n 2$

ادامه ی فرمول های انتگرال گیری

$$\text{۴) } \int a^{mx} dx = \frac{1}{m L_n a} a^{mx} + c \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

مثال :

$$\int 2 \times 5^{4x} dx = \frac{2}{4 L_n 5} 5^{4x} + c$$

نتیجه :

الف) $\int a^x dx = \frac{1}{L_n a} a^x + c \quad a > 0, \quad a \neq 1$

ب) $\int e^{mx} dx = \frac{1}{m} e^{mx} + c$

ج) $\int e^x dx = e^x + c$

مثال :

الف) $\int 2 \times 4^x dx = \frac{2}{L_n 4} 4^x + c$

ب) $\int 2 e^{\Delta x} dx = \frac{2}{\Delta} e^{\Delta x} + c$

ج) $\int 2 e^x dx = 2 e^x + c$

$$\delta) \int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c$$

مثال :

$$\int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x + c$$

نتیجه :

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\varepsilon) \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c$$

مثال :

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + c$$

نتیجه :

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

انتگرال های زیر را با توجه به راهنمایی داده شده حل نمایید:

$$\int 10 \, dx = \qquad \qquad \qquad \int k \, dx = kx + C$$

$$\int x^6 \, dx = \qquad \qquad \qquad \int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \sqrt[5]{x^3} \, dx \qquad \qquad \qquad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

$$\int \frac{1}{x^3} \, dx \qquad \qquad \qquad \frac{1}{x^m} = x^{-m}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}} \, dx \qquad \qquad \qquad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}, \frac{1}{x^m} = x^{-m}$$

$$\int \frac{7}{4x^3} \, dx \qquad \qquad \qquad \int k f(x) \, dx = k \int f(x) \, dx$$

$$\int \frac{5x\sqrt{x} + 7x^6}{x^2} \, dx \qquad \qquad \qquad \frac{A+B}{C} = \frac{A}{C} + \frac{B}{C}$$

$$\int \frac{3\sin x - 2\cos x}{5} \, dx \qquad \qquad \qquad \begin{aligned} \int \sin x \, dx &= -\cos x + c \\ \int \cos x \, dx &= \sin x + c \end{aligned}$$

$$\int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos x + \sin x} \, dx = \qquad \qquad \qquad A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$$

$$\int \frac{x+3}{x} \, dx = \qquad \qquad \qquad \int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c$$

$$\int e^{x+5} \, dx = \qquad \qquad \qquad a^{m+n} = a^m a^n, \int e^x \, dx = e^x + c$$

روش های انتگرال گیری

در این بخش به معرفی برخی از روش های انتگرال گیری می پردازیم.

الف) انتگرال گیری به روش تغییر متغیر (روش جانشانی)

در برخی انتگرال ها با قرار دادن یک عبارت به عنوان متغیر جدید می توان انتگرال را طوری ساده کرد که به شکل یکی از فرمول های بیان شده تبدیل شود. این روش را روش تغییر متغیر می نامند. شرط استفاده از این روش این است که مشتق عبارتی که به عنوان متغیر جدید انتخاب می شود، در انتگرال وجود داشته باشد. فرض کنید که u تابعی انتگرال پذیر بر حسب x و du دیفرانسیل u باشد. در این صورت می توان نوشت که :

$$۱) \int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c \quad n \neq -1$$

$$۲) \int u^{-1} du = \int \frac{1}{u} du = L_n |u| + c$$

مثال ۱ :

$$\int (5x^2 + 4x - 1)^5 (10x + 4) dx = ?$$

$$u = 5x^2 + 4x - 1$$

$$du = (10x + 4) dx$$

$$\int (5x^2 + 4x - 1)^5 (10x + 4) dx = \int u^5 du = \frac{1}{6} u^6 + c = \frac{1}{6} (5x^2 + 4x - 1)^6 + c$$

مثال ۲ :

$$\int 14(x^2 + 4x + 3)^{1/2} (x + 2) dx = ?$$

$$u = x^2 + 4x + 3$$

$$du = (2x + 4) dx = 2(x + 2) dx$$

$$\begin{aligned} \int 14(x^2 + 4x + 3)^{1/2} (x + 2) dx &= \int 7 \times 2(x^2 + 4x + 3)^{1/2} (x + 2) dx = \int 7u^{1/2} du = \frac{7}{1.5} u^{1.5} + c \\ &= \frac{7}{1.5} (x^2 + 4x + 3)^{1.5} + c \end{aligned}$$

مثال ٣ :

$$\int \delta(\sin x + \cos x)^{\gamma} (\cos x - \sin x) dx = ?$$

$$u = \sin x + \cos x$$

$$du = (\cos x - \sin x) dx$$

$$\int \delta(\sin x + \cos x)^{\gamma} (\cos x - \sin x) dx = \int \delta u^{\gamma} du = u^{\delta} + c = (\sin x + \cos x)^{\delta} + c$$

مثال ٤ :

$$\int \frac{\gamma x + \varphi}{x^{\gamma} + \varphi x + \psi} dx = ?$$

$$u = x^{\gamma} + \varphi x + \psi$$

$$du = (\gamma x + \varphi) dx$$

$$\int \frac{\gamma x + \varphi}{x^{\gamma} + \varphi x + \psi} dx = \int \frac{du}{u} = L_n |u| + c = L_n |x^{\gamma} + \varphi x + \psi| + c$$

$$\gamma) \int a^{mu} du = \frac{\psi}{m L_n a} a^{mu} + c \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

مثال :

$$\int \gamma \times \delta^{\gamma \sin x} \cos x dx = ?$$

$$u = \sin x \rightarrow du = \cos x dx$$

$$\int \gamma \times \delta^{\gamma \sin x} \cos x dx = \int \gamma \times \delta^{\gamma u} du = \frac{\gamma}{\gamma L_n \delta} \delta^{\gamma u} = \frac{\gamma}{\gamma L_n \delta} \delta^{\gamma \sin x} + c$$

مثال :

$$\int e^{x^2+3x}(2x+3)dx = ?$$

$$u = x^2 + 3x \rightarrow du = (2x + 3)dx$$

$$\int e^{x^2+3x}(2x+3)dx = \int e^u du = e^u + c = e^{x^2+3x} + c$$

$$\int \sin au du = -\frac{1}{a} \cos au + c$$

مثال :

$$\int \sin^2(x^2 + \sqrt{x})(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})dx = ?$$

$$u = x^2 + \sqrt{x} \rightarrow du = (2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})dx$$

$$\int \sin^2(x^2 + \sqrt{x})(2x + \frac{1}{2\sqrt{x}})dx = \int \sin^2 u du = -\frac{1}{2} \cos^2 u + c = -\frac{1}{2} \cos^2(x^2 + \sqrt{x}) + c$$

ب) انتگرال گیری به روش جزء به جزء

اگر u و v دو تابع مشتق پذیر باشند، در این صورت مطابق دستور مشتق گیری از ضرب دو تابع خواهیم داشت:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

این روش انتگرال گیری که به روش جزء به جزء موسوم است، یکی از مهمترین روش های انتگرال گیری است. توجه داشته

باشید که در این روش ابتدا باید u و dv را با دقت انتخاب نمود.

تمرین : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int x \sin x dx = ?$$

$$\int \underbrace{x}_u \underbrace{\sin x}_{dv} dx = ?$$

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin x dx \rightarrow v = \int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int x \sin x dx = (x)(-\cos x) - \int (-\cos x) dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + c$$

تمرین: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int x e^x dx = ?$$

حل:

$$\int \underbrace{x}_u \underbrace{e^x}_{dv} dx = ?$$

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = e^x dx \rightarrow v = \int e^x dx = e^x$$

$$\int x e^x dx = (x)(e^x) - \int (e^x) dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

تمرین: انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int x \cos x dx = ?$$

حل:

$$\int \underbrace{x}_u \underbrace{\cos x}_{dv} dx = ?$$

$$u = x \rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos x dx \rightarrow v = \int \cos x dx = \sin x$$

$$\int x \cos x dx = (x)(\sin x) - \int (\sin x) dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + c$$

ج) انتگرال گیری به روش تجزیه ی کسرها

یکی دیگر از روش های انتگرال گیری، تجزیه ی کسرها می باشد. در این روش به کمک یکی از روش های تجزیه ی کسر ها، یک کسر را به مجموع دو یا چند کسر گویای دیگر تبدیل می کنیم و سپس از هر یک از آنها انتگرال گیری می کنیم. در ابتدا به روش های تجزیه ی کسر ها به طور مختصر اشاره می کنیم.

تمرین: کسر $\frac{x+3}{x(x-1)}$ را تجزیه کنید.

حل: ابتدا ریشه های مخرج را تعیین می کنیم.

$$x(x-1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}$$

پس مخرج ریشه ی تکراری ندارد.

حال می توان نوشت:

$$\frac{x+3}{x(x-1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} \rightarrow \frac{x+3}{x(x-1)} = \frac{a(x-1)+bx}{x(x-1)}$$

$$a(x-1)+bx = x+3$$

$$\text{IF } x=0 \rightarrow a(0-1)+b(0)=0+3 \rightarrow -a=3 \rightarrow a=-3$$

$$\text{IF } x=1 \rightarrow a(1-1)+b(1)=1+3 \rightarrow b=4$$

$$\therefore \frac{x+3}{x(x-1)} = \frac{-3}{x} + \frac{4}{x-1}$$

تمرین: کسر $\frac{2}{x^3-x}$ را تجزیه کنید.

حل:

$$x^3-x=0 \rightarrow x(x-1)(x+1)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

مخرج ریشه ی تکراری ندارد.

$$\frac{2}{x^3-x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} \rightarrow \frac{2}{x^3-x} = \frac{a(x-1)(x+1)+bx(x+1)+cx(x-1)}{x(x-1)(x+1)}$$

$$a(x-1)(x+1)+bx(x+1)+cx(x-1)=2$$

$$\text{IF } x=0 \rightarrow -a=2 \rightarrow a=-2$$

$$\text{IF } x=1 \rightarrow 2b=2 \rightarrow b=1$$

$$\text{IF } x=-1 \rightarrow 2c=2 \rightarrow c=1$$

$$\therefore \frac{2}{x^3-x} = \frac{-2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

تمرین: الف: کسر $\frac{x-1}{x^2-x-2}$ را تجزیه کنید. ب: انتگرال $\int \frac{x-1}{x^2-x-2} dx$ را محاسبه کنید.

حل: ابتدا ریشه های مخرج را تعیین می کنیم.

$$x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1) = 0 \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-1 \end{cases}$$

مخرج ریشه ی تکراری ندارد. پس قرار می دهیم.

$$\frac{x-1}{x^2-x-2} = \frac{x-1}{(x-2)(x+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1}$$

$$\rightarrow \frac{x-1}{(x-2)(x+1)} = \frac{a(x+1)+b(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

$$\Rightarrow x-1 = a(x-2) + b(x+1)$$

$$\begin{cases} x=2 \rightarrow 2-1 = a(2-2) + b(2+1) \rightarrow b = \frac{1}{3} \\ x=-1 \rightarrow -1-1 = a(-1-2) + b(-1+1) \rightarrow b = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\frac{x-1}{x^2-x-2} = \frac{x-1}{(x-2)(x+1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x+1} \rightarrow \frac{x-1}{(x-2)(x+1)} = \frac{\frac{2}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1}$$

$$\int \frac{x-1}{x^2-x-2} dx = \int \left(\frac{\frac{2}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1} \right) dx = \frac{2}{3} \int \frac{1}{x-2} dx + \frac{1}{3} \int \frac{1}{x+1} dx$$

$$= \frac{2}{3} L_n |x-2| + \frac{1}{3} L_n |x+1| + c$$

تمرین:

الف) مقادیر a و b را طوری بیابید که داشته باشیم.

$$\frac{1}{(3x-1)(3x+2)} = \frac{a}{3x-1} + \frac{b}{3x+2}$$

ب) انتگرال زیر را بدست آورید.

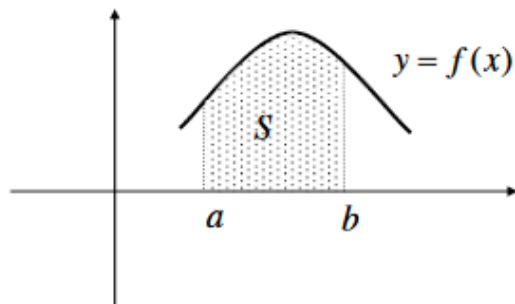
$$\int \frac{1}{(3x-1)(3x+2)} dx$$

کاربرد های انتگرال

در این بخش چند کاربرد مهم انتگرال را معرفی می کنیم.

الف) کاربرد انتگرال در محاسبه ی مساحت زیر منحنی

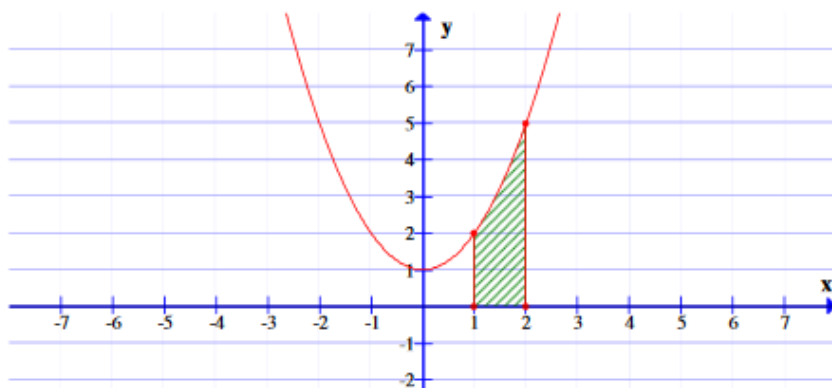
اگر تابع f روی بازه ی $[a, b]$ پیوسته باشد. مساحت محصور بین منحنی نمودار f و محور طولها و دو خط $x = a$ و $x = b$ به شکل زیر به دست می آید.



$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

تمرین : مساحت ناحیه ی محدود به نمودار تابع $f(x) = x^2 + 1$ و محور x ها و خطوط $x = 1$ و $x = 2$ را محاسبه کنید.

حل : ابتدا نمودار تابع را رسم می کنیم.



Ac
Go

$$f(x) = x^3 + 1$$

$$\int f(x) dx = \int (x^3 + 1) dx = \frac{1}{4} x^4 + x + c$$

$$\int_1^2 f(x) dx = \left(\frac{1}{4} x^4 + x \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{1}{4} (2)^4 + (2) \right) - \left(\frac{1}{4} (1)^4 + (1) \right) = \frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{4} - 1 = \frac{1}{2}$$

$$S = \int_1^2 f(x) dx = \frac{1}{2}$$

تمرین برای حل :

۱) مساحت ناحیه ی محدود به نمودار تابع $f(x) = x^3 + 5x^2$ و محور x ها و خطوط $x = 0$ و $x = 1$ را محاسبه کنید.

۲) مساحت ناحیه ی محدود به نمودار تابع $f(x) = x^3 - 4x$ و محور x ها و خطوط $x = 1$ و $x = 3$ را محاسبه کنید.

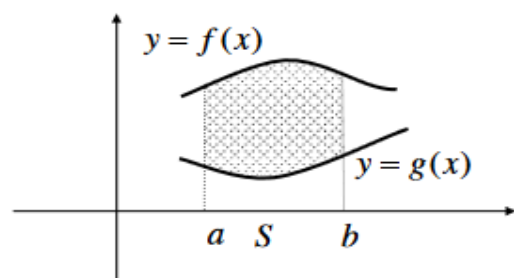
۳) مساحت ناحیه ی محدود به نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و محور x ها و خطوط $x = 1$ و $x = 16$ را محاسبه کنید.

۴) مساحت ناحیه ی محدود به نمودار تابع $f(x) = \sin x$ و محور x ها و خطوط $x = 0$ و $x = \pi$ را محاسبه کنید.

ب) کاربرد انتگرال در محاسبه ی مساحت بین دو منحنی

اگر دو تابع f و g روی بازه ی $[a, b]$ پیوسته باشند. مساحت محصور بین منحنی نمودار این دو تابع و دو خط $x = a$

و $x = b$ به شکل زیر به دست می آید.

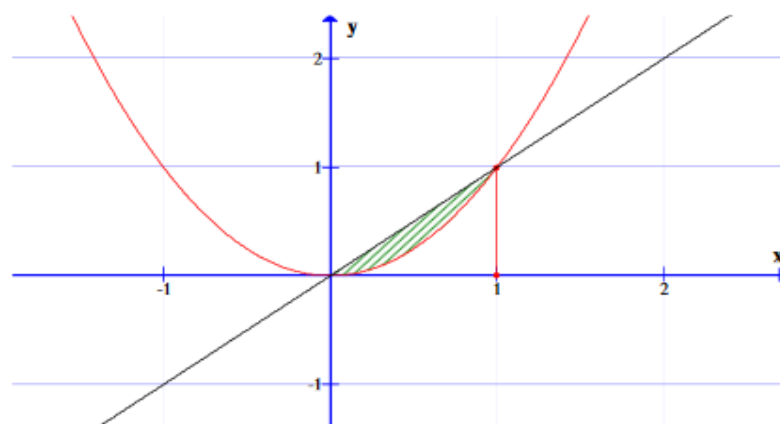


$$S = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right|$$

تمرین : مساحت ناحیه ی بین نمودارهای دو تابع $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$ را به دست آورید.

حل : ابتدا محل تقاطع این دو منحنی را تعیین می کنیم.

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \rightarrow x^2 = x \rightarrow x = 0, x = 1$$



Act
Go 1

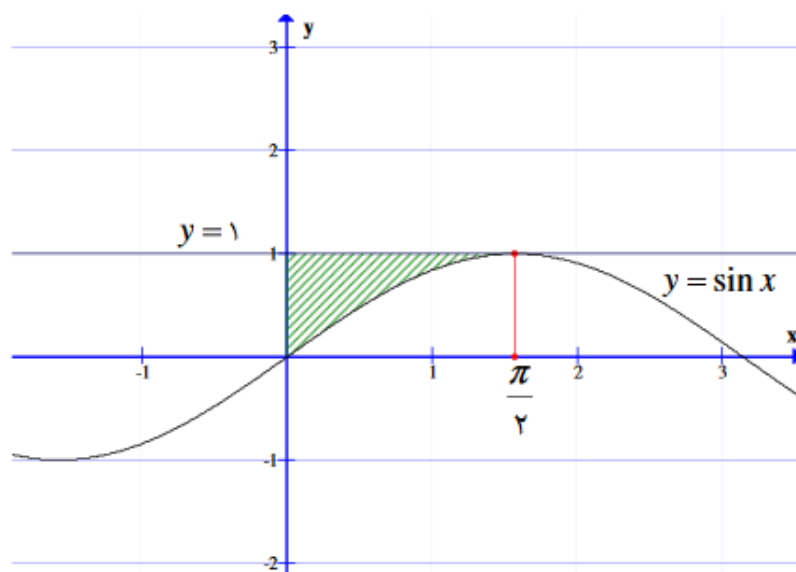
$$\int (f(x) - g(x)) dx = \int (x - x^2) dx = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 + c$$

$$\int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^1 = \left(\frac{1}{2} (1)^2 - \frac{1}{3} (1)^3 \right) - \left(\frac{1}{2} (0)^2 - \frac{1}{3} (0)^3 \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$S = \left| \int_a^b (f(x) - g(x)) dx \right| = \frac{1}{6}$$

تمرین برای حل :

(۱) با توجه به شکل زیر مساحت ناحیه ی هاشور خورده را به دست آورید.



(۲) مساحت ناحیه ی بین نمودار های دو تابع $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^2$ را به دست آورید.

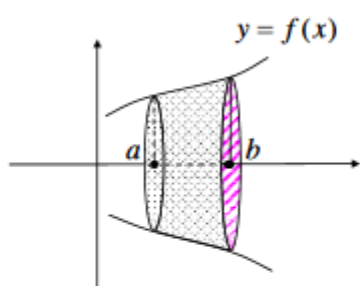
(۳) مساحت ناحیه ی بین نمودار های دو تابع $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ را در فاصله ی $[\frac{\pi}{4}, \pi]$ به دست آورید.

(۴) مساحت ناحیه ی بین نمودار های سه تابع $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$ و $h(x) = 2x$ را به دست آورید.

ج (کاربرد انتگرال در محاسبه ی حجم جسم دوار

اگر تابع f روی بازه ی $[a, b]$ پیوسته باشند، حجم جسم حاصل از دوران نمودار تابع f حول محور طولها از خط $x = a$ تا

خط $x = b$ به شکل زیر به دست می آید.



$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

تمرین : حجم جسم حاصل از دوران نمودار تابع $y = x^2$ حول محور x از خط $x = 1$ تا خط $x = 3$ بدست آورید.

حل :

$$f(x) = x^2 \rightarrow f^2(x) = x^4$$

$$\int f^2(x) dx = \int x^4 dx = \frac{1}{5} x^5 + c$$

$$\int f^2(x) dx = \frac{1}{5} x^5 \Big|_1^3 = \frac{1}{5} (3)^5 - \frac{1}{5} (1)^5 = \frac{243}{5} - \frac{1}{5} = \frac{242}{5}$$

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx = \frac{242}{5} \pi$$

تمرین برای حل :

(۱) سطح محصور بین منحنی نمایش تابع $y = \sqrt{x-2}$ و محور طولها و دو خط $x = 2$ و $x = 4$ را حول محور طولها

دوران می دهیم، حجم جسم حادث از این دوران را محاسبه کنید.

(۲) حجم جسم حادث از دوران خط $y = 4$ حول محور طولها و محصور بین دو خط $x = 2$ و $x = 5$ را بدست آورید.

(۳) با توجه به شکل مقابل حجم ناحیه ی محصور بین دو استوانه را محاسبه کنید.