

**تعریف علم آمار:** روشهایی برای جمع آوری، تنظیم و تجزیه و تحلیل اطلاعات عددی درباره موضوعی مشخص در بین افراد یا اشیا تاریخیچه آمار: ابتدا از آمار برای سرشماری ها و بررسی شانس در بازی های شانسی .

ما با استفاده از آمار و اطلاعات میتوانیم :

1- داده ها را تبدیل به اطلاعات کنیم.

2- تعیین احتمال رخداد پیشامدها بر مبنای آزمایش تصادفی

3- مشخص کردن نحوه توزیع احتمال داده های تصادفی

4- پیش بینی و تعیین خطا

در بخش اول از جدول فراوانی به عنوان توصیفی برای تعیین و محاسبه جداول و معیارهایی که به کمک آن قادر به تشخیص خصوصیات داده های جمع آوری شده باشیم.

در مباحث آماری به طور عمده در مورد دو دسته از متغیرها صحبت میکنیم: (کمی و کیفی) و (گسسته و پیوسته )

کمی: متغیر با داده های عددی، مقدار متغیر از طریق اندازه گیری یا شمارش بدست می آید مانند نمره، قد، وزن و...

کیفی: متغیر با داده های غیر عددی، مقدار متغیر از طریق تعیین کیفیت مشخص میشود مانند جنسیت (زن و مرد)، شغل افراد، محل سکونت و...

جدول آماری: نمایش داده ها را با نظم خاص در چند سطر و ستون یک جدول آماری میگویند یک جدول باید به گونه ای باشد که به آسانی بتوان پاره ای از دانسته های نهفته در داده ها از روی آن خواند در کارهای آماری برای اینکه داده ها را خلاصه کنند آنها را در جدولی به نام جدول فراوانی تنظیم میکنند.

فراوانی و فراوانی نسبی :

فراوانی: به تعداد تکرارهای هر مقدار فراوانی میگوییم.

هرگاه  $n$  چیز از  $k$  نوع  $T_1, T_2, \dots, T_k$  با فرض  $n \geq k \geq 2$  به ترتیب با تعدادهای  $f_1, f_2, \dots, f_k$  تشکیل شده باشد این تعداد را فراوانی و  $\frac{f_1}{n}, \frac{f_2}{n}, \dots, \frac{f_k}{n}$  را فراوانی نسبی میگوییم فراوانی نسبی را با  $r_1, r_2, \dots, r_k$  نمایش میدهیم.

$$\sum_{i=1}^k f_i = n$$

نکته: مجموع فراوانی نسبی برابر با یک است یعنی:

$$\sum_{i=1}^k r_i = 1$$

**فراوانی تجمعی (انباشته):** برای محاسبه فراوانی تجمعی هر رده کافی است که فراوانی آن رده را با فراوانی رده های قبلی جمع کرد فراوانی تجمعی را با  $g_i$  نمایش می دهیم مثلا اگر رده سوم را بخواهیم فراوانی رده اول و دوم را ب رده سوم جمع میکنیم.

فراوانی نسبی تجمعی: از حاصل جمع فراوانی نسبی رده های قبلی ورده انتخابی بدست می آید به عنوان مثال رده سوم از حاصل جمع رده اول و دوم و سوم بدست می آید و آن را با  $s_i$  نمایش میدهیم.

## جدول فراوانی به صورت زیر میباشد:

| فراوانی نسبی<br>تجمعی | فراوانی<br>تجمعی | فراوانی<br>نسبی | فراوانی | طبقه یا رده |
|-----------------------|------------------|-----------------|---------|-------------|
|                       |                  |                 |         |             |

مثال: پزشکی 20 بیمار قلبی دارد که گروه خونی آنها عبارتند از :

B,A,O,AB,O,A,A,A,O,O,A,A,B,B,AB,O,AB,AB,O,O,

یک جدول فراوانی برای این داده ها به دست آورید.

| نسبی<br>تجمعی | تجمعی | فراوانی<br>نسبی | فراوانی | گروه خونی |
|---------------|-------|-----------------|---------|-----------|
| 6/20          | 6     | 6/20            | 6       | A         |
| 9/20          | 9     | 3/20            | 3       | B         |
| 13/20         | 13    | 4/20            | 4       | AB        |
| 20/20=1       | 20    | 7/20            | 7       | O         |
|               |       | 1               | 20      |           |

نکته: در داده‌های پیوسته مانند وزن افراد، طول قد ،و.. نمیتوان برای هر نقطه فراوانی تعیین نمود مثلاً بگوییم 4 نفر دارای وزن 65 است بنابراین برای طبقه بندی مراحل زیر را انجام میدهیم:

1- مرتب کردن داده ها از کوچک به بزرگ

2- تعیین دامنه تغییرات یعنی (دامنه تغییرات = بزرگترین داده - کوچکترین داده)

3- تعداد طبقات

4- فاصله طبقات

5- تکمیل جدول فراوانی

فاصله طبقات = دامنه طبقه / تعداد طبقات یعنی:

$$C=R/K$$

مرکز دسته = (کران بالا + کران پایین) / 2

مثال: فرض کنید داده های زیر قد 25 کودک مهد را بر حسب سانتی متر نشان میدهد میخواهیم جدول فراوانی آن را در 5 طبقه بدست می آوریم .

103،110،104،105،100،101،97،104،102،110،103،106

110،104،103،98،105،100،109،104،99،98،109،105،

حل: ابتدا داده ها را از کوچک به بزرگ مینویسیم.

97،98،99،100،100،101،102،103،103،103،103،104،104،  
104،104،104،105،105،105،106،109،109،110،110

$$R=110-97=13$$

$$C=13/5=3$$

| نسبی تجمعی | فراوانی نسبی | فراوانی تجمعی | فراوانی | مرکز دسته                                | حدود طبقه                                                  |
|------------|--------------|---------------|---------|------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
|            |              |               | 3       | $(97+100)/2=98.5$<br>$(100+103)/2=101.5$ | 97-100<br>100-103<br>103-106<br><br>106-109<br><br>109-112 |

معیارهای تمرکز:

**میانة:** داده های  $x_1, x_2, \dots, x_n$  که به صورت غیر نزولی مرتب شده اند در نظر بگیرید عدد  $m$  را میانة این داده ها میگوییم در صورتی که تقریباً نصف داده ها در سمت چپ و نصف داده ها در سمت راست این عدد قرار گیرند روش محاسبه آن برای داده های گسسته و پیوسته به صورت زیر است:

گسسته: ابتدا داده های را به صورت غیر نزولی مرتب میکنیم آن گاه اگر تعداد داده ها فرد باشد عدد وسط میانة است و اگر زوج باشد نصف مجموع دو داده ای که در وسط قرار میگیرد میانة است یعنی:

$$n \text{ فرد باشد} \quad m = x_{(\frac{n+1}{2})}$$

$$m = \frac{x_{(\frac{n}{2})} + x_{(\frac{n+2}{2})}}{2} \quad n \text{ زوج باشد}$$

مثال: میانة را برای داده های زیر بدست آورید:

12,18,15,14,12,21,19,20,21,

حل : ابتدا داده ها را مرتب میکنیم :

12,12,14,15,18,19,20,21,21

$$m = x_{(9+1)/2} = x_5 = 18$$

مثال: میانه داده های زیر 12 و 11 و 8 و 4 و 9 و 7 و 5 و 2

$$m = x_4 + x_5 / 2 = (7 + 8) / 2 = 7.5$$

میانه برای داده های پیوسته: ابتدا در جدول فراوانی مقدار  $\frac{n}{2}$  را بدست می آوریم اولین طبقه ای که

فراوانی تجمعی آن بزرگتر یا مساوی  $\frac{n}{2}$  باشد را در نظر میگیریم این رده یا طبقه میانه دار است پس

از فرمول زیر میانه را بدست می آوریم :

$$m = L + \frac{\frac{n}{2} - g}{f} \cdot w$$

فراوانی تجمعی طبقه قبل از طبقه میانه است g

w فاصله طبقات

کران واقعی پایین طبقه میانه L

f فراوانی طبقه میانه

مثال: در جدول زیر میانه را بدست آورید.

| حدود طبقه | 20-39 | 30-39 | 40-49 | 50-59 |
|-----------|-------|-------|-------|-------|
| f         | 3     | 6     | 7     | 4     |
| g         | 3     | 9     | 16    | 20    |

حل: ابتدا را بدست می آوریم  $\frac{n}{2} = \frac{20}{2} = 10$

طبقه ای که فراوانی تجمعی آن بیشتر از باشد یعنی طبقه سوم 40-

49 است پس:

$$m = 39.5 + ((10 - 9) / 7) \cdot 10 = 40.92$$

مد یا نما: داده ای که فراوانی آنها از سایر داده ها بیشتر باشد نما یا مد میگوییم و با  $M$  نمایش میدهیم .

محاسبه نما برای داده های گسسته: ابتدا فراوانی داده ها را پیدا میکنیم داده ای که بیشترین فراوانی را دارد به عنوان نما اختیار میکنیم. اگر دو داده ی غیر مجاور دارای فراوانی یکسان و بیش از سایر فراوانی ها باشند هر دو را به عنوان نما انتخاب میکنیم و داده ها را دونمایی میگوییم و اگر دو داده مجاور هم باشند نصف مجموع آنها را به عنوان نما اختیار میکنیم اگر تمام داده ها فراوانی یکسانی داشته باشند داده ها را بدون نما میگوییم .

مثال: برای داده های زیر نما را بدست آورید.

1) 18, 17, 11, 11, 9, 7, 4, 3, 2

$M=11$

2) 7, 3, 4, 3, 4, 7, 4, 7, 3

چون فراوانی همه داده ها یکسان است پس نما ندارد.

**نما برای داده های پیوسته:** در جدول فراوانی طبقه ای که فراوانی آن بیشتر است را انتخاب میکنیم و سپس از فرمول زیر بدست می آوریم :

$$M = Mo = L + \left( \frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) w$$

اختلاف فراوانی رده نما و رده قبل آن  $d_1$

اختلاف فراوانی رده نما و رده بعد از آن  $d_2$

مثال: نما را بدست آورید.

| حدود طبقه | 3-5 | 6-8 | 9-11 |
|-----------|-----|-----|------|
| $f_i$     | 4   | 20  | 12   |

$$M = 5.5 + (16 / (6 + 8)) \times 2 = 6.9$$

تمرین: نما را مشخص کنید.

1) 1, 1, 3, 2, 1, 4, 3, 3, 5

2) 3, 1, 1, 2, 1, 3, 2, 2, 4, 5, 2, 1

**چندک:** عدد  $Q_p$  را که در آن  $0 < p < 1$  چندک مرتبه  $p$  می نامند هرگاه تقریباً  $100p$  درصد داده ها کوچکتر از آن باشد مثلاً  $Q_{.15}$  را چندک مرتبه میگویند هرگاه تقریباً  $15$  درصد دادهها کوچکتر از  $Q_{.15}$  باشد چندک ها کلی تر از میانه هستند  $Q_{.5}$  همان میانه است.

**چندکهای معروف عبارتند از :**

**چارکها:** که به ازای  $p = /25, /5, /75$  بدست می آیند و آنها را به ترتیب  $Q_1, Q_2, Q_3$  می نامیم که  $Q_1, Q_3$  را چارک اول و سوم و  $Q_2$  را میانه میگوییم.

**دهکها:** که به ازای  $p = /1, /2, \dots, /9$  بدست می آیند و آنها را با نشان  $D_1, D_2, \dots, D_9$  می دهند.

**صدکها:** به ازای  $p = /01, /02, \dots, /99$  بدست می آیند و آنها را با  $p_1, \dots, p_{99}$  نشان می دهند.

محاسبه چندک برای داده های گسسته:

فرض کنیم  $n$  داده گسسته داشته باشیم که به طور غیر نزولی به صورت  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  تنظیم شده باشند برای بدست آوردن  $Q_p$  به صورت زیر عمل میکنیم :

اگر  $(n+1)p$  مساوی عدد صحیح  $r$  باشد فرض میکنیم  $Q_p = r$  در غیر این صورت بزرگترین عدد صحیح در را مساوی و اختلاف آنرا با  $r$  برابر  $w$  در نظر میگیریم واضح است که  $0 \leq w \leq 1$  حال داریم :

$$Q_p = (1-w)x_r + wx_{r+1}$$

مثال: برای داده های زیر که به ترتیب غیر نزولی مرتب شده اند مقدار  $Q_{6/6}$  را حساب کنید.

$$n=11, (n+1)p=(11+1)/6=7.2$$

$$r=7, w=.2, Q_{6/6} = (1-.2)x_7 + .2x_{7+1} = .8(5) + .2(7) = 5.4$$

مثال: اگر 200 داده داشته باشیم که  $x_{150}, x_{151}$  آن 4 باشد چارک سوم را برای آن بدست آورید.

$$n=200, p=.75$$

$$(200+1).75=201(.75)=150.75$$

$$Q_{.75} = (1-.75)x_{150} + .75x_{151} = .25(4) + .75(4) = 4$$

محاسبه چندک برای داده های پیوسته: ابتدا داده ها را در یک جدول فراوانی تنظیم میکنیم و سپس رده

ای که در  $Q_p$  آن قرار دارد رده می نامیم برای تعیین ابتدا باید  $np$  را بدست آوریم و بعد رده ای که

فراوانی تجمعی آن بیشتر یا مساوی آن است رده  $Q_p$  است. و از فرمول زیر استفاده میکنیم :

$$Q_p = L_p + \left( \frac{np - g_p}{f_p} \right) w$$

در این فرمول  $n$  تعداد داده ها ،  $L_p$  مرز پایین رده  $Q_p$ ، یعنی نخستین رده ای که فراوانی تجمعی آن برابر یا بیشتر از  $np$  است .

$g_p$  فراوانی تجمعی رده بلافاصله قبل از رده  $Q_p$  .

$f_p$  فراوانی رده و  $w$  طول رده می باشد.

مثال: برای داده های داده شده در جدول زیر دهک هفتم را بدست آورید.

| رده         | $f_i$ | $g_i$ |
|-------------|-------|-------|
| 149.5-156.5 | 15    | 15    |
| 156.5-163.5 | 20    | 35    |
| 163.5-170.5 | 30    | 65    |
| 170.5-177.5 | 25    | 90    |
| 177.5-184.5 | 10    | 100   |

$$n=100, p=.7, np=100.7/10=70$$

رده ای که فراوانی تجمعی آن بیشتر یا مساوی 70 است یعنی طبقه 4 (177.5-170.5)

$$D_{.7} = L_p + \left( \frac{(np - g_p)}{f_p} \right) . w = 170.5 + ((70 - 65) / 25) . 7 = 171.9$$

واریانس و انحراف استاندارد:

$$s^2 = \sum_{i=1}^k \frac{f_i (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad \text{واریانس در لغت به معنای تفاوت و تغییر است: از فرمول}$$

که میانگین مجذور انحراف می باشد . به دست می آورند اگر تمام داده ها به میانگین نزدیک باشد واریانس کوچک میشود. به ویژه اگر تمام داده ها با میانگین برابر باشند واریانس صفر است . این حقیقت نشان میدهد که واریانس معیار خوبی برای سنجش پراکندگی و تغییر پذیری داده ها نسبت به میانگین میباشد. با استفاده از جبر مقدماتی فرمول بالا به صورت زیر ساده تر است:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k f_i x_i^2 - \bar{x}^2$$

و انحراف استاندارد برابر با جذر واریانس یعنی  $\sqrt{s^2}$  است .

برای داده های زیر واریانس و انحراف استاندارد را بدست آورید

9 و 3 و 0 و 7 و 1

$$s^2 = \frac{(1^2 + 7^2 + 0^2 + 3^2 + 9^2) - 4^2}{5} = \frac{140}{5} - 16 = 16$$

$$\bar{x} = \frac{1+7+0+3+9}{5} = \frac{20}{5} = 4$$

ضریب تغییر : نسبت انحراف استاندارد به میانگین یعنی  $c_v = \frac{s}{\bar{x}}$  که اغلب به صورت درصد بیان

میشود ضریب تغییر می نامند این ضریب که به واحد اندازه گیری بستگی ندارد در عمل برای مقایسه به کار میرود .

مثال: کارخانه ای دو نوع لاستیک اتو موبیل تولید می کند برای نوع  $A$  میانگین عمر 10000 کیلو

متر با انحراف استاندارد 2000 کیلومتر و برای نوع  $B$  میانگین عمر 11000 کیلومتر با

انحراف استاندارد 1000 کیلو متر می باشد کدام نوع لاستیک بهتر است؟

A ضریب تغییرات نوع  $cv=s/x=2000/10000=.2*100=20\%$

B ضریب تغییرات نوع  $cv=s/x=1000/11000=1/11*100=9\%$

نوع B بهتر است چون هم میانگین عمر آن بیشتر است و هم ضریب تغییر آن کوچکتر است.

**نیم برد چارکها :**

نصف برد چارکهای اول و سوم یعنی  $Q = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$  را نیم برد چارکها می نامند و  $Q' = \frac{Q_1 + Q_3}{2}$  را میان چارکی می گوئیم.

تمرین: برای داده های زیر واریانس و انحراف استاندارد را بدست آورید.

8 و 11 و 12 و 16 و 7 و 9 و 4 و 6 و 6 و 4 و 5 و 7 و 6 و 8

**نمودار ساقه ای :**

**نمودار ساقه ای ساده:** این نمودار معمولاً برای داده هایی که به صورت اعداد کوچک هستند به کار می رود این نمودار را به صورت زیر می سازند:

الف) هر داده را دو قسمت میکنیم رقم دهگان را ساقه ورقم یکان را برگ می نامیم مثلاً در داده 46 رقم 4 ساقه ورقم 6 برگ را می سازد.

ب) ساقه ها را به ترتیب صعودی از بالا به پایین طرف چپ یک خط عمودی می گذاریم.

ج) برگهای هر ساقه را به ترتیب غیر نزولی از چپ به راست طرف دیگر خط عمودی پهلوی آن می گذاریم معمولاً این نمودار را نمودار ساقه ای یا ساقه و برگ می خوانند.

مثال: فرض کنید داده های زیر دانش آموزان کلاس اول ابتدایی در 15 دبستان شهر می باشد این داده به ترتیب غیر نزولی عبارتند از :

22,24,25,34,35,41,41,46,46,46,47,49,54,59,60

نمودار ساقه ای ساده را بدست آورید.

| برگ           | ساقه |
|---------------|------|
| 2 4 5         | 2    |
| 4 5           | 3    |
| 1 1 6 6 6 7 9 | 4    |
| 4 9           | 5    |
| 0             | 6    |

نکته: اگر داده ها دارای ارقام اعشاری باشند نخست آنها را به اعداد درست سر راست می کنند و سپس نمودار ساقه ای را می سازند مثلا 53.93 را به 54 سرراست می کنیم و آن را با ساقه 5 و برگ 4 نشان می دهند.

## احتمال:

### ۲-۱ آنالیز ترکیبی

مقصود از «آنالیز ترکیبی»، دسته بندی اشیاء یا اعداد یا حروف و یا انسان ها به گروه های چندتایی است که بر طبق قراردادهای خاصی از لحاظ جنس و نوع یا قرار گرفتن اشیاء نزد یک دیگر تفاوت داشته باشند. آنالیز ترکیبی شامل ۳ بخش است: «جایگشت»، «ترتیب» و «ترکیب». قبل از پرداختن به این سه بخش باید به «فاکتوریل»، «اصل ضرب» و «اصل جمع» بپردازیم.

### ۲-۲ فاکتوریل

در مجموعه اعداد طبیعی، حاصل ضرب  $n$  در تمام اعداد متوالی قبل از خودش الی ۱ را « $n$  فاکتوریل» می‌نامیم و با علامت  $n!$  نمایش می‌دهیم:

$$n! = n(n-1)(n-2) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

مثال ۱

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

مثال:

$$2! = 2 \times 1 = 2$$

$$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

نکته ۱ طبق قرارداد فاکتوریل اعداد یک و صفر برابر ۱ است:

$$0! = 1, 1! = 1$$

**مثال ۲** معادله  $(x-1)! = 1$  را حل کنید.  
حل.

**مثال ۲** معادله  $(x-1)! = 1$  را حل کنید.  
حل.

$$(x-1)! = 1; \begin{cases} (x-1)! = 1!; x-1 = 1; x = 2 \\ (x-1)! = 0!; x-1 = 0; x = 1 \end{cases}$$

**مثال ۴** کسرهای زیر را ساده کنید.

$$۱) \frac{۶!}{۴!} \quad ۲) \frac{۵!۲!}{۳!} \quad ۳) \frac{(n+۱)!}{(n-۱)!}$$

حل.

$$\frac{۶!}{۴!} = \frac{۶ \times ۵ \times ۴!}{۴!} = ۶ \times ۵ = ۳۰$$

(۱)

$$\frac{۵!۲!}{۳!} = \frac{۵ \times ۴ \times ۳! \times ۲!}{۳!} = ۵ \times ۴ \times ۲ \times ۱ = ۴۰$$

(۲)

$$\frac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = \frac{(n+۱)n(n-۱)!}{(n-۱)!} = (n+۱)n = n^2 + n$$

(۳)

## ۲-۶ جایگشت دایره‌ای

در برابر جایگشت‌های خطی مفهوم دیگری وجود دارد به نام جایگشت دایره‌ای. منظور از «جایگشت دایره‌ای» ترتیبی از قرار گرفتن اشیاء حول یک دایره است. فرق جایگشت‌های دایره‌ای با جایگشت‌های خطی در این است که جایگاه‌ها هیچ فرق و تمایزی با یک‌دیگر ندارند و فقط حالت قرار گرفتن اشیاء نسبت به هم مهم است. لذا اگر شیء اول را بخواهیم در یک جایگاه قرار دهیم، از آن‌جا که جایگاه‌ها با هم هیچ فرقی ندارند، انتخاب خاصی نداریم.

تعداد جایگشت‌های  $n$  شیء متمایز  $a_1, a_2, \dots, a_n$  که بر روی محیط یک دایره یا هر سطح بسته دیگری مرتب شده است، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(n-۱)!$$

**مثال ۲۵** پنج زوج (زن و شوهر) می‌خواهند دور یک میز بنشینند. به چند طریق این کار ممکن است اگر:

(۱) هیچ شرطی نداشته باشیم.

(۲) زن‌ها کنار هم و مردها کنار هم نشسته باشند.

حل.

(۱)

$$(n-۱)! = (۱۰-۱)! = ۹!$$

تعداد جایگشت‌های  $r$  شیء از  $n$  شیء را «ترتیب  $r$  از  $n$ » می‌نامند و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$P_n^r = P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}, \quad n \geq r$$

**مثال ۳۰** حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

$$۱) P_5^r \quad ۲) P_n^{n-1} \quad ۳) P_r^r$$

**مثال ۳۱** اگر  $2P_n^r + 8 = P_{rn}^r$ ،  $n$  را بیابید.

حل.

$$\begin{aligned} 2P_n^r + 8 &= P_{rn}^r; \quad 2 \times \frac{n!}{(n-r)!} + 8 = \frac{(rn)!}{(rn-r)!}; \\ 2n(n-1) + 8 &= 2n(2n-1); \quad 2n^r - 2n + 8 = 4n^r - 2n; \\ 2n^r &= 8; \quad n^r = 4; \quad n = 2 \end{aligned}$$

حل.

$$P_5^r = \frac{5!}{(5-r)!} = \frac{5 \times 4 \times 3!}{r!} = 20$$

(۱)

$$P_n^{n-1} = \frac{n!}{(n-n+1)!} = \frac{n!}{1!} = n!$$

(۲)

$$P_r^r = \frac{r!}{(r-r)!} = \frac{r!}{0!} = r! = 24$$

(۳)

**مثال ۳۱** اگر  $2P_n^r + 8 = P_{rn}^r$ ،  $n$  را بیابید.

حل.

$$\begin{aligned} 2P_n^r + 8 &= P_{rn}^r; \quad 2 \times \frac{n!}{(n-r)!} + 8 = \frac{(rn)!}{(rn-r)!}; \\ 2n(n-1) + 8 &= 2n(2n-1); \quad 2n^r - 2n + 8 = 4n^r - 2n; \\ 2n^r &= 8; \quad n^r = 4; \quad n = 2 \end{aligned}$$

نکته ۱۲ منظور از ترتیب  $r$  تایی از  $n$  شیء تشکیل گروه‌هایی است که هر یک شامل  $r$  شیء متمایز از این  $n$  شیء باشد و اختلاف هر گروه با گروه دیگر هم از لحاظ قرار گرفتن اشیاء و هم در نوع آن‌ها باشد، هر یک از این گروه‌ها را یک ترتیب  $r$  تایی از  $n$  شیء می‌نامیم.

نکته ۱۳ تفاوت ترتیب با جایگشت در آن است که در هر حالت همه اشیاء شرکت ندارند.

**مثال ۳۲** به چند طریق می‌توان از بین ۵ نفر از کارمندان یک اداره به ترتیب یک نفر به عنوان رئیس و یک نفر به عنوان معاون انتخاب کرد؟ (هر نفر فقط می‌تواند یک پست داشته باشد).  
حل. می‌خواهیم از بین ۵ نفر، ۲ نفر را انتخاب کنیم، طوری که عنوان سمت آن‌ها مهم است:

ترکیب: تعداد انتخاب  $r$  از  $n$  شی را بدون در نظر گرفتن ترتیب آنها ترکیب  $r$  از  $n$  مینامند و از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$C_n^r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}, \quad n \geq r$$

مثال: حاصل عبارتهای زیر را بدست آورید.

$$1)c_7^2, 2)c_n^1$$

حل:

$$C_n^1 = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$C_7^2 = \frac{7!}{2!(7-2)!} = \frac{7 \times 6 \times 5!}{2 \times 5!} = 21$$

آزمایش تصادفی: هر عملی را که تصادف در آن دخالت داشته باشد  
آزمایش تصادفی می‌گویند در واقع عملی که تحت شرایطی ثابت و  
برحسب موضوعی مورد علاقه هر بار که تکرار شود منجر به یکی از  
اعضای مجموعه ناتهی  $s$  گردد.

مثال: پنج کارت یکسان، دو عدد سفید یک عدد قرمز و دو عدد سبز را به خوبی مخلوط می کنیم و چشم بسته یکی را بیرون می آوریم تحت این شرایط اگر رنگ کارت بیرون آمده موضوع مورد علاقه باشد در این صورت :

$$S=\{\text{قرمز، سفید، سبز}\}$$

حال اگر کارته دارای شماره های 1 و 2 و 3 و 4 و 5 باشد و موضوع شماره کارت باشد پس:

$$S=\{1,2,3,4,5\}$$

مثال: سکه ای را به تصادف می اندازیم اگر موضوع مورد علاقه نقش روی سکه باشد یا خط یا شیر که با  $T$  و  $H$  نشان می دهیم پس :

$$S=\{H,T\}$$

**تعریف پیشامد:** در یک آزمایش تصادفی هر پیشامد  $E$  عبارت است از زیر مجموعه ای از تمام نتیجه ها. اگر مجموعه  $E$  به صورت یک عضوی باشد آن را پیشامد ساده و اگر  $E$  تهی باشد آن را پیشامد محال و اگر  $E$  برابر  $S$  باشد آن را پیشامد حتمی می گوئیم.

مثال: دو عدد کارت سفید به شماره های 1 و 2، سه عدد کارت قرمز به شماره های 3، 4، 5 و دو عدد کارت سبز به شماره های 6، 7 را به خوبی مخلوط کرده یکی از هفت کارت را بیرون می آوریم فرض کنید شماره های کارت موضوع مورد علاقه باشد در این صورت فضای نمونه :

$$S=\{1,2,3,4,5,6,7\}$$

پیشامد مشاهده کارت قرمز یعنی پیشامد بیرون آمدن کارت قرمز:

$$E = \{3, 4, 5\}$$

پیشامدمشاهده مضرب 5:

{5} که یک پیشامد ساده است .

پیشامد مشاهده کارت بزرگتر از 8 پیشامدی محال است یعنی مجموعه تهی و پیشامد کارت کوچکتر از 7 پیشامد حتمی است یعنی تمام مجموعه فضای نمونه.

مثال : در بازی شیر و خط سکه ای را سه بار می اندازیم در این آزمایش تصادفی فضای نمونه برابر است با:

$$\left\langle \begin{array}{l} H \left\langle \begin{array}{l} H \\ T \end{array} \right. \\ T \left\langle \begin{array}{l} H \\ T \end{array} \right. \end{array} \right\rangle \Rightarrow s = \{THH, TTH, TTT, HHH, HHT, HTH, HTT, THT\}$$

**تعریف کلاسیک احتمال:** اگر در یک آزمایش تصادفی تعداد کل نتایج ممکنه  $n$  باشد احتمال واقعه  $A$  عبارت است از :تعدادنتایج مطلوب تقسیم بر تعدادکل نتایج ممکنه .

در واقع اگر آزمایش تصادفی را بار انجام دهیم داریم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(s)}$$

مثال : در ظرفی چهار مهره یکسان به رنگهای سفید ،سبز ،قرمز و سیاه موجود است یکی از مهره ها را به تصادف از این ظرف بیرون می آوریم احتمال پیشامد سفید بودن این مهره:

$$P(\text{سفید بودن}) = n(A)/n(s) = 1/4$$

مثال: سکه ای را دو بار پرتاب می کنیم احتمال آوردن حداقل یک شیر:

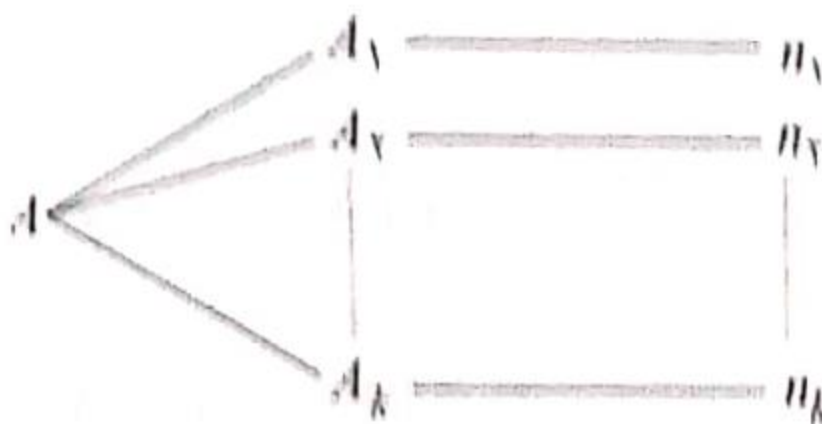
فضای نمونه حاصل از این آزمایش برابر است با:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}, n(A) = \{HH, HT, TH\}$$

$$P(A) = \frac{3}{4}$$

اصول شمارش: فرض کنید کار  $A$  را به  $m$  طریق با نام های  $x_1, x_2, \dots, x_m$  و کار  $B$  را به  $n$  طریق با نام های  $y_1, y_2, \dots, y_n$  بتوان انجام داد اصول شمارش عبارتند از:

الف) اگر عمل  $A$  (عمل اصلی و هدف مساله) وابسته به انجام همه اعمال  $A_1, A_2, \dots, A_k$  باشد به طوری که انجام عمل  $A_1$  به  $n_1$  طریق و انجام عمل  $A_2$  به  $n_2$  طریق و ... انجام  $A_k$  به  $n_k$  طریق امکان پذیر باشد. آنگاه انجام عمل  $A$  به  $n_1 + n_2 + \dots + n_k$  طریق امکان پذیر است.



نکته: در اصل جمع  $A_i$  ها با هم همزمان اتفاق نمی افتند حرف ربط (یا) در بیان مضمون اصل جمع نقش تعیین کننده ای دارد.

مثال: یک کلاس هنری شامل 5 شاگرد پسر و 3 شاگرد دختر است تعداد راه هایی که می توان یک نماینده برای کلاس انتخاب کرد را بیابید.

حل: عمل اصلی انتخاب یک نماینده دختر یا پسر است پس بنا به اصل جمع :

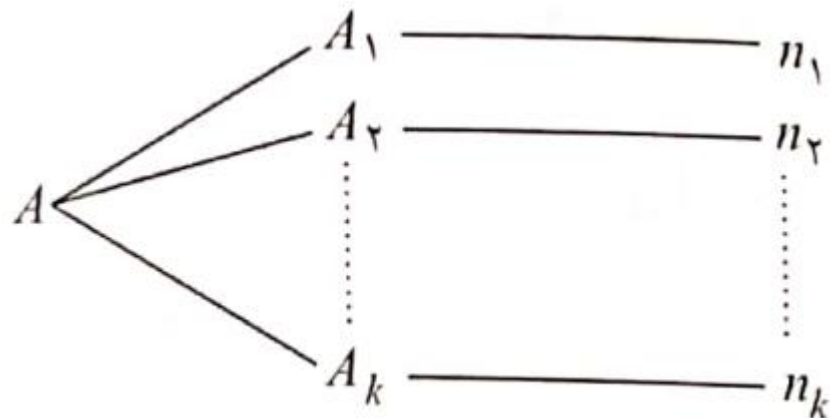
$$5+3=8$$

مثال: برای رفتن از شهر  $x$  به شهر  $y$  3 راه زمینی، 1 راه دریایی و 2 راه هوایی وجود دارد به چند طریق می توان از شهر به شهر رفت .

حل: عمل اصلی رفتن از شهر  $x$  به شهر  $y$ ، یعنی راه زمینی یا هوایی و یا دریایی است پس :

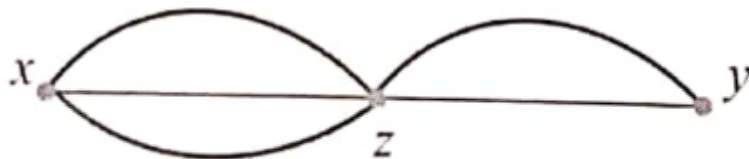
$$3+1+2=6$$

ب) اگر عمل  $A$  (عمل اصلی و هدف مساله) وابسته به انجام همه اعمال  $A_1, A_2, \dots, A_k$  باشد به طوری که انجام عمل  $A_1$  به  $n_1$  طریق و انجام عمل  $A_2$  به  $n_2$  طریق و ... انجام  $A_k$  به  $n_k$  طریق امکان پذیر باشد. آنگاه انجام عمل  $A$  به  $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$  طریق امکان پذیر است .



نکته : در اصل ضرب تمام باید انجام گیرد حرف ربط (و) در بیان مضمون اصل ضرب نقش تعیین کننده ای دارد.

مثال : برای رفتن از شهر  $x$  به شهر  $y$  باید مطابق شکل از شهر  $z$  عبور کرد به چند طریق می توان از  $x$  به  $y$  رفت.



هدف کار : رفتن از  $x$  به  $y$  :

$$A_1 : x \rightarrow z \rightarrow n_1 = 3$$

$$A_2 : z \rightarrow y \rightarrow n_2 = 2$$

هر یک از کارهای 1 و 2 هدف مساله را برآورد نمی کند اما اگر این دو کار را پشت سر هم انجام دهیم چنین خواهد شد پس طبق اصل ضرب داریم :

$$2 \times 3 = 6$$

تمرین :اگر رستورانی 4 نوع سالاد ،8 نوع غذا و 5 نوع نوشابه داشته باشد به چند طریق مختلف برای انتخاب سالاد ،غذا و نوشابه وجود دارد .

تمرین :فرض کنید یک کلمه عبور از 3 نشانه تشکیل شده است نشانه اول حرفی از الفبای فارسی بوده و نشانه دوم رقم باشد تعداد کلمات عبور را بیابید.

مثال :می خواهیم از بین 5 پزشک ،10 پرستار و 4 کارمند یک گروه 2 نفری تشکیل دهیم چند گروه می توان ساخت اگر افراد هر گروه از راه های مختلف باشد.

گروه دونفری=(پزشک وپرستار)یا (پزشک وکارمند)یا (پرستار وکارمند)

$$110=(5 \times 10)+(5 \times 4)+(4 \times 10)=\text{گروه 2 نفری}$$

جایگشت:ترتیبی را که میتوان چیز متمایز را از چپ به راست پهلوی هم گذاشات یک جایگشت از این چیز می گویند مثلا

یک جایگشت از یه چیز تعداد جایگشت های شی متمایز را بدین طریق پیدا میکنیم :

برای ساختن یک جایگشت از شی متمایز باید آنها را یک به یک انتخاب کرده از چپ به راست پهلوی هم قرار دهیم . شی اول را به طریق (کار )شی دوم را به طریق (کار ) وشی را به یک طریق(کار ) میتوان انتخاب کرده طبق اصل ضرب ساختن یک جایگشت معادل با انجام پیاپی کارهای به

1... (1- ) طریق انجام می گیرد این حاصلضرب را با  
نشان مدهیم و آن را فاکتریال میخوانند بنابر این تعداد  
جایگشت های شی متمایز میشود  
بنابر این

مثال : 2 سرباز و 3 درجه دار به چند طریق میتوانند در یک صف  
بایستند.

نکته: با حروف کلمه (تبدیل) چند کلمه 5 حرفی میتوان ساخت که  
در آن حرف (ت) قبل از (ل) آمده باشد (نه به الزام بلا فاصله)  
متغییر تصادفی:

برای اینکه مفهومه متغییر تصادفی روشن شود به ذکر یک مثال  
میپردازیم .

سکه ای را دوبار به تصادف می اندازیم شماره شیرهارو در این  
آزمایش با نشان میدهیم واضح است که از