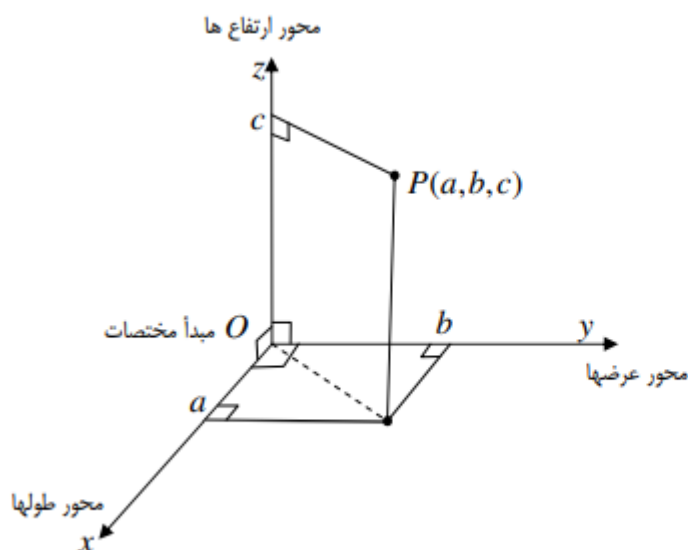


بین نقاط فضا و سه تایی های مرتب (x, y, z) از اعداد حقیقی تناظر یک به یک وجود دارد. یعنی هر نقطه در فضا با یک سه تایی مرتب از اعداد حقیقی به شکل (x, y, z) و هر سه تایی از اعداد حقیقی با یک نقطه در فضا متناظر است.



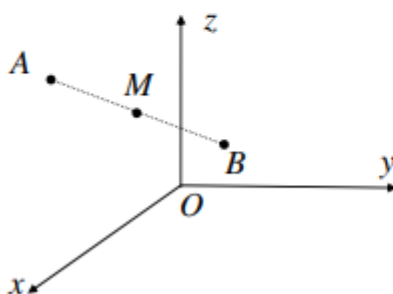
فاصله ی دو نقطه در فضا

فاصله ی دو نقطه ی A و B در فضا از رابطه ی زیر بدست می آید.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

حالت خاص: فاصله ی هر نقطه مانند $A(a, b, c)$ از مبدأ مختصات به صورت زیر است.

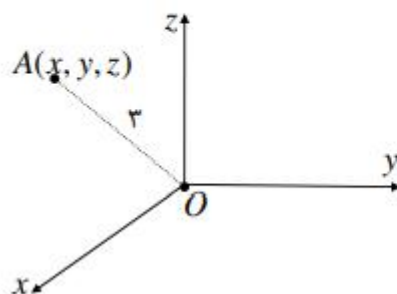
$$OA = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$



تمرین: فاصله ی دو نقطه ی $A(1, 2, 3)$ و $B(-1, 4, 4)$ را بدست آورید.

تمرین: مجموعه ی نقاطی از فضای R^3 را طوری پیدا کنید که فاصله ی آنها از مبدأ مختصات برابر ۳ باشد.

حل:

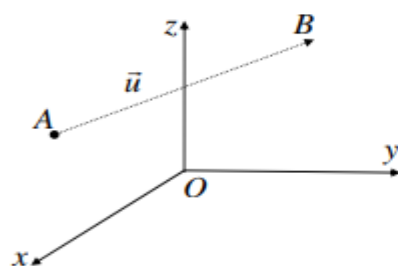


$$OA = 3$$

$$\rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3 \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

کره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳

بردارها در فضای R^3



هر پاره خط جهت دار که ابتدای آن نقطه ی A و انتهای آن نقطه ی B باشد، را یک پیکان می نامند و آن را با $\vec{AB}$ یا $\vec{u}$ نمایش می دهند.

اگر در پیکان $\vec{AB}$ نقاط A و B بر هم منطبق باشند، آن پیکان را

پیکان صفر می نامند و آن را با نماد $\vec{O}$ نمایش می دهند.

هر پیکان دارای مختصات ی به صورت زیر است.

$$\vec{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

طول پاره خط AB متناظر با پیکان $\vec{AB}$ را اندازه یا طول پیکان $\vec{AB}$ می نامند و آن به صورت $\|\vec{AB}\|$ نمایش می دهند. واضح است که:

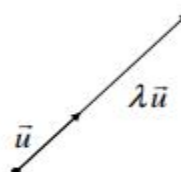
$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

تمرین: اگر $A(1, 2, 4)$ و $B(-1, 3, 2)$ مختصات پیکان $\vec{AB}$ و اندازه ی آن را تعیین کنید.

ضرب عدد در بردار

اگر $\vec{u} = (a, b, c)$ یک بردار و λ یک عدد حقیقی باشد. در این صورت $\lambda\vec{u}$ برداری است که از ضرب عدد λ در تمام مولفه های $\vec{u}$ بدست می آید.

$$\lambda\vec{u} = \lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$$



توجه داشته باشید که :

۱: اگر $\lambda = 0$ باشد، $\lambda\vec{u} = \vec{0}$

۲: اگر $\lambda > 0$ باشد، بردارهای $\vec{u}$ و $\lambda\vec{u}$ هم جهت هستند.

۳: اگر $\lambda < 0$ باشد، بردارهای $\vec{u}$ و $\lambda\vec{u}$ در جهت مخالف همدیگر هستند.

۴: اگر $\lambda = 1$ باشد، $\lambda\vec{u} = \vec{u}$

۵: اگر $\lambda = -1$ باشد، $\lambda\vec{u} = -\vec{u}$

۶: در هر صورت $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$

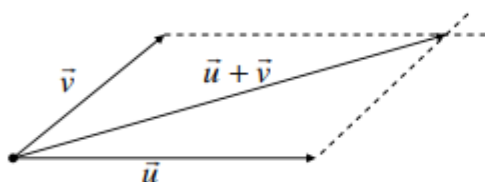
نتیجه :

۱: حاصل ضرب عدد -1 در بردار غیر صفر $\vec{u}$ یعنی $(-1)\vec{u}$ را قرینه ی بردار $\vec{u}$ می نامند و آن را با $-\vec{u}$ نمایش می دهند.

۲: دو بردار غیر صفر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موازیند، هرگاه وجود داشته باشد عدد حقیقی غیر صفر λ بطوری که $\vec{u} = \lambda\vec{v}$

جمع دو بردار

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار باشند، بردار حاصل جمع این دو بردار به صورت زیر تعریف می شود.



$$\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$$

$$\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2)$$

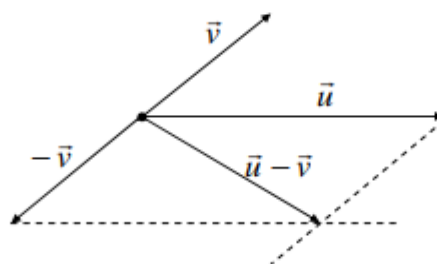
تفریق دو بردار

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار باشند، بردار حاصل تفریق این دو بردار به صورت زیر تعریف می شود.

$$\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$$

$$\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$$

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (a_1 - a_2, b_1 - b_2, c_1 - c_2)$$



تمرین : اگر $\vec{u} = (5, 3, 0)$ و $\vec{v} = (-1, 2, 3)$ مطلوبست محاسبه ی

الف) $2\vec{u} =$

د) $2\vec{u} - 3\vec{v} =$

ب) $\vec{u} + \vec{v} =$

هـ) $\|\vec{u} + \vec{v}\| =$

ج) $\vec{u} - \vec{v} =$

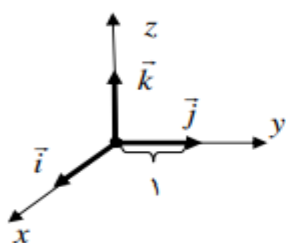
و) $\|\vec{u} - \vec{v}\| =$

بردار های واحد مختصات

در فضای سه بعدی R^3 بردار های واحد $\vec{i} = (1, 0, 0)$ و $\vec{j} = (0, 1, 0)$ و $\vec{k} = (0, 0, 1)$ که به ترتیب در جهت مثبت محور

طول ها، عرض ها و ارتفاع ها قرار دارند را بردار های یکه ی استاندارد یا بردار های واحد مختصات می نامند.

هر بردار را می توان بر حسب بردار های واحد مختصات نوشت:



$$\vec{u} = (a, b, c)$$

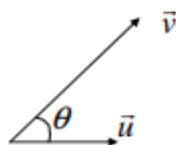
$$= (a, 0, 0) + (0, b, 0) + (0, 0, c)$$

$$= a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1)$$

$$= a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

ضرب داخلی دو بردار

تعریف هندسی ضرب داخلی: اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار غیر صفر باشند و θ کوچکترین زاویه ی بین آنها در نظر گرفته شود. در این صورت ضرب داخلی (ضرب نقطه ای) دو بردار را با $\vec{u} \cdot \vec{v}$ نشان داده و به شکل زیر تعریف می کنند.



$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \theta$$

تمرین: اگر $\|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ و $\|\vec{u}\| = \sqrt{12}$ و زاویه ی بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ برابر 30° درجه باشد. حاصل ضرب داخلی این دو بردار را بدست آورید.

تعریف تحلیلی ضرب داخلی: اگر $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ و $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ دو بردار در فضای سه بعدی باشند، آنگاه ضرب داخلی آنها به صورت زیر تعریف می شود.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2$$

تمرین: اگر $\vec{u} = (0, 2, 1)$ و $\vec{v} = (-1, 1, 3)$ آنگاه مطلوبست تعیین :

الف) $\vec{u} \cdot \vec{v} =$

ب) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) =$

نتیجه: حاصل ضرب داخلی دو بردار همیشه یک عدد حقیقی است.

تمرین: اگر دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ موازی باشند و $\vec{u} = (1, -2, 2)$ و $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15$ مختصات بردار $\vec{v}$ را تعیین کنید.

حل :

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \xrightarrow{\exists r \in \mathbb{R}} \vec{v} = r \vec{u} \rightarrow \vec{v} = r(1, -2, 2) = (r, -2r, 2r)$$

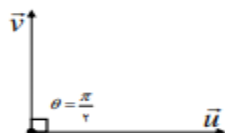
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 15 \rightarrow (1)(r) + (-2)(-2r) + (2)(2r) = 15 \rightarrow r + 4r + 4r = 15 \rightarrow r = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \vec{v} = (r, -2r, 2r) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{10}{3}, \frac{10}{3}\right)$$

نتیجه: دو بردار بر هم عمودند، هرگاه ضرب داخلی آنها صفر باشد و برعکس یعنی :

برای هر دو بردار غیر صفر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ بردار $\vec{u}$ بر $\vec{v}$ عمود است، اگر و فقط اگر $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ و بر

عکس



$$\vec{u} \perp \vec{v} \leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

ویژگی های ضرب داخلی

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ سه بردار و α و β دو عدد حقیقی باشند، در این صورت:

$$۱) \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

$$۲) \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$۳) \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \text{و} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$۴) (\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = \alpha \beta (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

تعیین زاویه ی بین دو بردار

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار غیر صفر و θ زاویه ی بین آنها باشد. در این صورت:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

توجه : زاویه ی بین دو بردار ناصفر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ کوچکترین زاویه ای است که این دو بردار با هم تشکیل می دهند.

ویژگی های ضرب داخلی

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ سه بردار و α و β دو عدد حقیقی باشند، در این صورت:

$$۱) \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

$$۲) \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$۳) \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \text{و} \quad (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$$

$$۴) (\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = \alpha \beta (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

تعیین زاویه ی بین دو بردار

اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار غیر صفر و θ زاویه ی بین آنها باشد. در این صورت:

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

توجه : زاویه ی بین دو بردار ناصفر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ کوچکترین زاویه ای است که این دو بردار با هم تشکیل می دهند.

تمرین: زاویه ی بین دو بردار $\vec{u} = (2, -1, 1)$ و $\vec{v} = (1, 1, 2)$ را بیابید.

حل:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(1) + (-1)(1) + (1)(2) = 2$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$$

$$\cos \theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \rightarrow \angle \theta = \frac{\pi}{3}$$

تمرین: زاویه ی بین دو بردار $\vec{v} = (k, 2, 1)$ و $\vec{u} = (1, 0, 1)$ برابر $\frac{\pi}{4}$ است. مقدار k را به دست آورید.

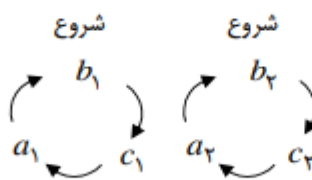
حل:

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{(1)(k) + (0)(2) + (1)(1)}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2 + (1)^2} \sqrt{(k)^2 + (2)^2 + (1)^2}} \rightarrow$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{k+1}{\sqrt{2} \sqrt{k^2+5}} \rightarrow 2k^2+20=4(k+1)^2 \rightarrow 8k-16=0 \rightarrow k=2$$

ضرب خارجی دو بردار

فرض کنیم که $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ و $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ دو بردار باشند. ضرب خارجی (ضرب برداری) $\vec{u}$ در $\vec{v}$ را که با نماد $\vec{u} \times \vec{v}$ نمایش داده می شود، به صورت زیر تعریف می کنیم.



مؤلفه های بردار اول بالا و مؤلفه های بردار دوم پایین قرار می گیرند.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = (b_1 c_2 - b_2 c_1, a_1 c_2 - a_2 c_1, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

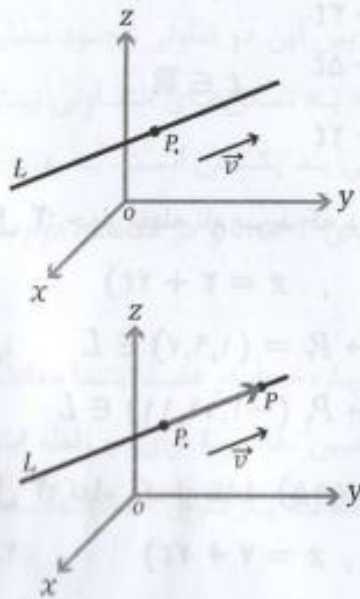
تمرین: اگر $\vec{u} = (2, -1, 3)$ و $\vec{v} = (-1, -2, 4)$. در این صورت بردار های زیر را محاسبه کنید.

الف) $\vec{u} \times \vec{v} =$ ب) $\vec{v} \times \vec{u} =$ ج) $\vec{u} \times \vec{u} =$

حل:

الف :

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = (2, -11, -5)$$



معادله خط : می‌خواهیم معادله خط L را که از نقطه $P(x_0, y_0, z_0)$ می‌گذرد، و با بردار $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ موازی است بنویسیم. اگر نقطه $P(x, y, z)$ دلخواه دیگری از خط باشد، بردارهای $\vec{P.P}$ و $\vec{v}$ موازیند و لذا عدد حقیقی مانند t موجود است به طوری که:

$$\vec{P.P} = t\vec{v}$$

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = t\langle a, b, c \rangle$$

معادله خط مستقیم در R_3

معادله پارامتری خط: $D: x = pt + x_0, \quad y = qt + y_0, \quad z = rt + z_0$

که در آن (x_0, y_0, z_0) یک نقطه از خط و $\vec{L} = (p, q, r)$ بردار موازی خط است (بردار هادی خط)

شرط: $pqr \neq 0$: $D: \frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$ معادله کانونیک خط

معادله اخیر را معادله متعارف یا معادله متقارن خط می‌نامند.

مثال ۶: معادله متعارف خطی که از نقطه $(2, 3, -4)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{v} = \langle 3, 5, 2 \rangle$ موازی است به صورت زیر است:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \rightarrow \frac{x - 2}{3} = \frac{y - 3}{5} = \frac{z + 4}{2}$$

مثال ۷: معادله متعارف خطی را بنویسید که از نقطه $A(7, 5, -2)$ بگذرد و با خط زیر موازی باشد.

$$L: \frac{2x - 3}{5} = \frac{3y + 2}{4} = \frac{z - 2}{2}$$

حل: چون دو خط موازی هستند بنابراین بردار هادی خط L (با هر مضربی از آن) را می‌توان به عنوان امتداد خط خواسته شده در نظر گرفت و سپس معادله خط را نوشت.

۱- معادله پارامتری یا متعارف خط‌های خواسته شده را بنویسید.

(۱) خطی که از نقطه $(2, 1, 0)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ موازی است.

(۲) خطی که از نقطه $(5, 4, 3)$ می‌گذرد و با محور z موازی است.

(۳) خطی که از نقطه $(3, -1, 4)$ می‌گذرد و با بردار $\vec{v} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$ موازی است.

(۴) خطی که از دو نقطه $A(4, 3, 1)$ و $B(-2, 0, 2)$ می‌گذرد.

۲-۳ سطح‌های استوانه‌ای و درجه دوم

تاکنون مشاهده کرده‌اید که هر رابطه بر حسب x و y نمایش دهنده یک منحنی در صفحه می‌باشد. بعضی از این رابطه‌ها به صورت زیر بودند:

$$\text{خط راست } (y = b, x = a, y = ax + b)$$

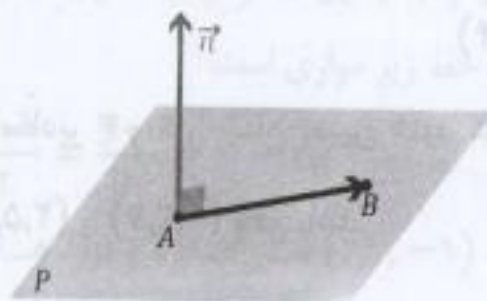
$$\text{پهلی } (x = ay^2 + by + c, y = ax^2 + bx + c)$$

$$\text{دایره } (x^2 + y^2 = a^2), \text{ بیضی } (\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1), \text{ هذلولی } (\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1)$$

$$\text{تابع نمایی طبیعی } (y = e^x), \text{ تابع لگاریتم طبیعی } (y = \ln x) \text{ و } \dots$$

اما در فضا هر رابطه بر حسب x, y و z شکلی پدید می‌آورد که ما آن را سطح یا رویه می‌نامیم. همان‌طور که در فضای دو بعدی ساده‌ترین منحنی خط راست می‌باشد، در فضای سه بعدی نیز ساده‌ترین سطح، صفحه است. با صفحه در بخش قبل آشنا شدید و مشاهده کردید که معادله کلی آن به صورت $ax + by + cz = d$ می‌باشد.

معادله صفحه: فرض کنیم $A(x_0, y_0, z_0)$ نقطه معلومی از صفحه P و بردار غیر صفر



$\vec{n} = \langle a, b, c \rangle$ بر صفحه عمود باشد.

اگر $B(x, y, z)$ نقطه دلخواه دیگری از

صفحه باشد، دو بردار $\vec{n}$ و $\vec{AB}$ برهم

عمودند و داریم: $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$ بنابراین

می‌توان نوشت:

$$\langle a, b, c \rangle \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (*)$$

مثال ۲: یک صفحه شامل تعداد نامتناهی نقطه است. سه نقطه بر روی صفحه زیر نام

$$P: 2x + y - z = 5$$

ببرید.

حل: کافی است در معادله صفحه دو متغیر را دلخواه انتخاب کرده و با حل معادله،

متغیر سوم را به دست آوریم، بدین وسیله نقطه‌ای از صفحه مشخص می‌شود.

$$(x = 0, y = 0) \rightarrow -z = 5 \rightarrow z = -5 \rightarrow A_1(0, 0, -5) \in P$$

$$(x = 0, z = 0) \rightarrow y = 5 \rightarrow A_2(0, 5, 0) \in P$$

$$(x = 2, z = 2) \rightarrow 6 + y - 2 = 5 \rightarrow y = 1 \rightarrow A_3(2, 1, 2) \in P$$

۱- معادله صفحه گذرا از نقطه A و عمود بر بردار $\vec{n}$ را بنویسید.

۱) $A(2, 3, 0)$, $\vec{n} = \langle 2, 1, 5 \rangle$

۲) $A(1, 3, -4)$, $\vec{n} = \langle 2, 3, 0 \rangle$

۳) $A(2, 3, 5)$, $\vec{n} = \langle 0, 0, 2 \rangle$

۲- سه نقطه دیگر از صفحه شامل نقطه A که بر بردار $\vec{n}$ عمود است را بنویسید.

$A(0, 2, 0)$, $\vec{n} = \langle 1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2} \rangle$

۱/۱) $2x + y + 5z = 7$ ۱/۲) $2x + 3y = 11$ ۱/۳) $z = 5$

۲) $6x + 3y - 2z = 6$, $(0, 0, -3), (1, 0, 0), (1, 1, \frac{2}{3})$

۲) سطح‌های درجه دوم: معادله‌ای که شامل هر سه متغیر x, y, z بوده و نسبت به همه متغیرها از درجه ۲ باشد سطحی را در فضا پدید می‌آورد، که آن را سطح درجه دوم می‌گویند. شکل کلی این سطح‌ها به صورت زیر است:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + K = 0$$

نابت می‌شود که تمام سطح‌های درجه ۲ با استفاده از انتقال و دوران محورها مختصات قابل تبدیل به یکی از شش صورت زیر می‌باشند:

$$۱) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

بیضی گون

$$۲) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

هذلولی گون یک‌پارچه

$$۳) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

هذلولی گون دوپارچه

$$۴) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

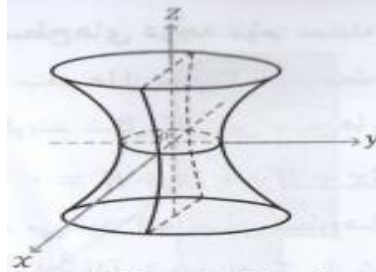
سهمی گون بیضوی

$$۵) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

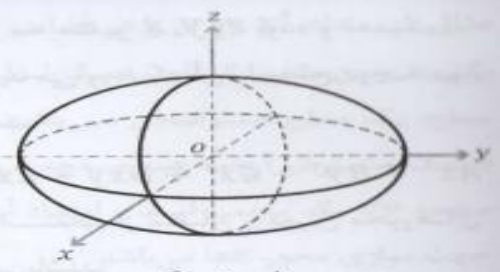
سهمی گون هذلولوی

$$۶) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

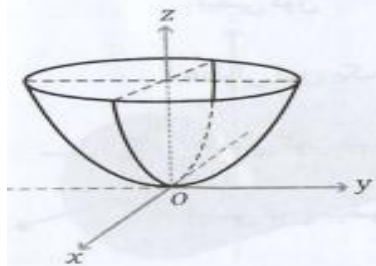
مخروط بیضی گون



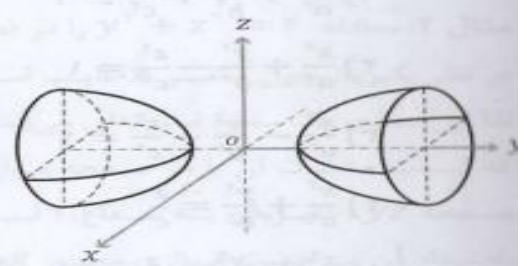
۲- هذلولی گون یک‌پارچه



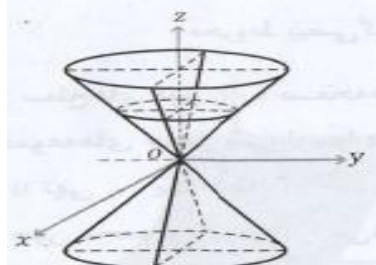
۱- بیضی گون



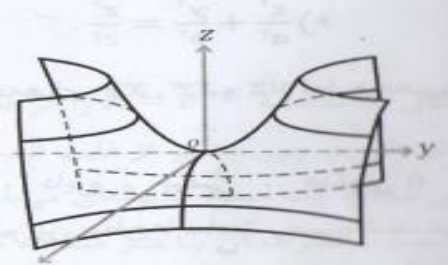
۴- سهمی گون بیضوی



۳- هذلولی گون دوپارچه



۶- مخروط بیضی گون



۵- سهمی گون هذلولوی

۲- سطح‌های درجه دوم زیر را توصیف کنید و در صورت امکان تصور خود را از این شکل فضایی رسم کنید.

$$۱) 4x^2 + 9y^2 + z^2 = 36 \quad ۲) x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

$$۳) z = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \quad ۴) z = x^2 + y^2$$

$$۵) x^2 + z^2 = y^2 \quad ۶) 9x^2 + 4y^2 = 36z^2$$

$$۱) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

بیضی گون

$$۲) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

هذلولی گون یک پارچه

$$۳) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

هذلولی گون دو پارچه

$$۴) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

سهمی گون بیضوی

$$۵) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

سهمی گون هذلولوی

$$۶) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

مخروط بیضی گون

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{36} = 1 \quad \text{و به معادله } (0,0,0) \text{ بیضی گون به مرکز}$$

$$(0,0,0) \text{ و شعاع یک}$$

۲/۳) یک سهمی گون که سطح مقطع آن با صفحه‌های موازی صفحه XY ، بیضی است.
(سهمی گون بیضوی)

۲/۴) یک سهمی گون که سطح مقطع آن با صفحه‌های موازی صفحه XY ، دایره است.
(سهمی گون دوار)

۲/۵) یک مخروط که سطح مقطع آن با صفحه‌های موازی صفحه XZ ، دایره است.
(مخروط دوار)

۲/۶) یک مخروط که سطح مقطع آن با صفحه‌های موازی صفحه XY ، بیضی است.
(مخروط بیضوی)

توابع چند متغیره

هر تابع که دامنه ی آن زیر مجموعه ای نا تهی از R^n و برد آن مجموعه ی اعداد حقیقی R باشد را یک تابع n متغیره می نامند.

$$f: R^n \rightarrow R$$
$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

مثال ۱: تابع $f: R^2 \rightarrow R$ ، با ضابطه ی زیر یک تابع دو متغیره است.

$$f(x_1, x_2) = 4x_1 - 3x_2 + x_1x_2$$

مثال ۲: تابع $f: R^3 \rightarrow R$ ، با ضابطه ی زیر یک تابع سه متغیره است.

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

مثال ۳: تابع $f: R^4 \rightarrow R$ ، با ضابطه ی زیر یک تابع چهار متغیره است.

$$f(x, y, z, t) = \sin x + \cos y + e^z + 4t^2$$

تمرین: مقدار تابع $f(x, y) = 4x^2 - 5y$ را در نقطه ی $(3, 4)$ به دست آورید.

حل:

$$f(3, 4) = 4(3)^2 - 5(4) = 36 - 20 = 16$$

اعمال روی توابع چند متغیره

اگر f و g دو تابع n متغیره باشند، آنگاه برای هر $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ از R^n می توان اعمال زیر را تعریف نمود.

$$(f + g)(X) = f(X) + g(X) \quad ۱: \text{ جمع دو تابع}$$

$$(f - g)(X) = f(X) - g(X) \quad ۲: \text{ تفریق دو تابع}$$

$$(kf)(X) = kf(X) \quad ۳: \text{ ضرب عدد در تابع}$$

$$(f \times g)(X) = f(X) \times g(X) \quad ۴: \text{ ضرب دو تابع}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(X) = \frac{f(X)}{g(X)} \quad ۵: \text{ تقسیم دو تابع}$$

توجه:

$$۱) D_{kf} = D_f$$

$$۲) D_{f+g} = D_{f-g} = D_{f \times g} = D_f \cap D_g$$

$$۳) D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{X \mid g(X) = 0\}$$

تمرین: توابع $f: R^2 \rightarrow R$ و $g: R^2 \rightarrow R$ با ضوابط تعریف

$$f(x, y) = 3 - x^2 - y^2 \text{ و } g(x, y) = 5xy - 3$$

داده شده اند. توابع $f + g$ و $f - 3g$ و $\frac{f}{g}$ تساوی های زیر را کامل کنید.

حل :

۱ :

$$(f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y) = (3 - x^2 - y^2) + (5xy - 3) = 5xy - x^2 - y^2$$

۲ :

$$\begin{aligned} (f - 3g)(x, y) &= f(x, y) - 3g(x, y) = (3 - x^2 - y^2) - 3(5xy - 3) \\ &= 3 - x^2 - y^2 - 15xy + 9 = 12 - x^2 - y^2 - 15xy \end{aligned}$$

نمودار تابع چند متغیره

هر تابع n متغیره مانند f را می توان به صورت مجموعه ی $n+1$ تایی های مرتب نوشت. مجموعه ی این $n+1$ تایی های مرتب نمودار (گراف) تابع را تشکیل می دهند.

برای مثال فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دو متغیره است. در این صورت نمودار f را با $G(f)$ نمایش می دهند و به صورت زیر تعریف می کنند.

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$$

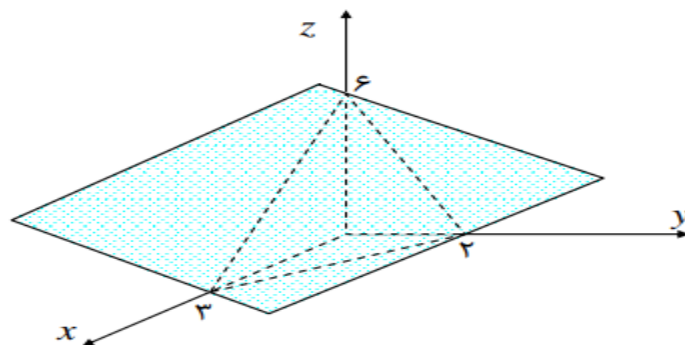
توجه: نمودار هر تابع دو متغیره یک رویه (سطح) نامیده می شود.

مثال ۱: نمودار تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه ی تعریف $f(x, y) = 6 - 2x - 3y$ عبارت است از:

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}$$

$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 6 - 2x - 3y\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y + z = 6\}$$

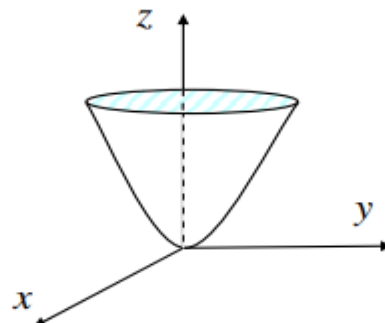
بنابر این نمودار تابع f صفحه ای با بردار نرمال $\vec{n} = (2, 3, 1)$ می باشد.



مثال ۲: نمودار تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه ی تعریف $f(x, y) = x^2 + y^2$ عبارت است از:

$$G(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$$

بنابر این نمودار تابع f رویه ای است که معادله ی آن $z = x^2 + y^2$ که به سهمیگون معروف است، می باشد.



دامنه توابع چند متغیره: همانند توابع یک متغیره، هرگاه تنها ضابطه یک تابع n متغیره مانند f داده شده باشد، منظور از دامنه این تابع، وسیع‌ترین مجموعه‌ای از نقاط $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ است که $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ یک عدد حقیقی باشد.

تذکر: در این فصل، اغلب توابعی که در نظر می‌گیریم شامل دو یا سه متغیر مستقل می‌باشند. وقتی تابع f به دو متغیر مستقل بستگی دارد، معمولاً متغیرهای مستقل را با x و y و متغیر وابسته را با $z = f(x, y)$ می‌نویسیم؛ و هنگامی که تابع f به سه متغیر مستقل بستگی دارد، متغیرهای مستقل را با x ، y و z و متغیر وابسته را با $w = f(x, y, z)$ می‌نویسیم.

مثال ۳: دامنه سه تابع چند متغیره در زیر تعیین شده است.

$$۱) f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$$

$$D_f = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 4 \geq 0\} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$$

معادله $x^2 + y^2 = 4$ یک دایره به مرکز $(0, 0)$ و شعاع ۲ می‌باشد. با کمی بررسی مشخص می‌شود که دامنه تابع f مجموعه نقاط بیرون و روی این دایره می‌باشد (با انتخاب یک نقطه دلخواه از صفحه می‌توان مشخص کرد که درون یا بیرون این دایره، دامنه است).

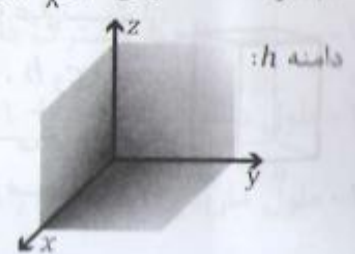
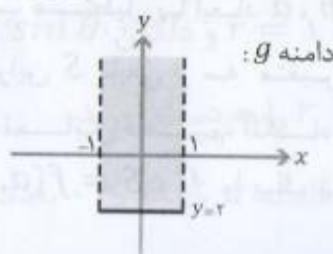
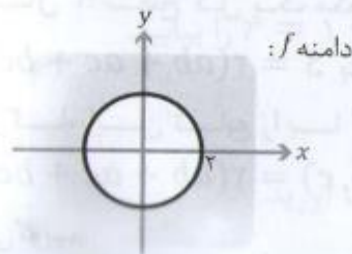
$$۲) g(x, y) = \frac{\sqrt{y+2}}{\sqrt{1-|x|}}$$

$$D_g = \{(x, y) \mid y+2 \geq 0 \text{ و } 1-|x| > 0\} = \{(x, y) \mid y \geq -2 \text{ و } -1 < x < 1\}$$

$$۳) h(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \ln z$$

$$D_h = \{(x, y, z) \mid x \geq 0 \text{ و } y \geq 0 \text{ و } z > 0\}$$

مجموعه نقاط واقع در $\frac{1}{8}$ اول دستگاه مختصات دکارتی xyz دامنه این تابع می‌باشد.



حد توابع چند متغیره

فرض می کنیم که f یک تابع دو متغیره باشد. می گوییم حد تابع f در نقطه ی (a, b) برابر L است، اگر هنگامی که نقطه ی (x, y) به نقطه ی (a, b) نزدیک و نزدیکتر می شود، مقدار $f(x, y)$ به عدد حقیقی L نزدیک و نزدیکتر شود. می توان نشان داد که عدد حقیقی L در صورت وجود منحصر به فرد است و لذا می نویسند.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$$

حد توابع سه متغیره و به طور کلی n متغیره نیز به همین صورت تعریف می کنند.

توجه: تمام مطالبی که در این بخش برای توابع دو متغیره عنوان می شود، برای توابع n متغیره نیز درست است.

نکته: اگر حد تابع دو متغیره f در نقطه ی (a, b) برابر L باشد، آنگاه

$$\lim_{(a,y) \rightarrow (a,b)} f(a, y) = L \quad \text{و} \quad \lim_{(x,b) \rightarrow (a,b)} f(x, b) = L$$

این مطلب بیان می کند که اگر $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = L$ ، آنگاه حد تابع f وقتی که نقطه ی (x, y) در مسیر های متفاوت $(x, y) \rightarrow (a, b)$

$y = b$ یا $x = a$ به نقطه ی (a, b) میل کند برابر با L است.

توجه: عکس مطلب فوق درست نمی باشد. لذا می توان از عکس آن برای اثبات عدم وجود حد یک تابع استفاده کرد. بدین

شکل که با انتخاب دو مسیر متفاوت اگر دو حد متفاوت به دست آمد، بدین معنی است که تابع در این نقطه دارای حد نیست.^۱

تمرین: نشان دهید تابع $f(x, y) = \frac{2x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2}$ در نقطه ی $(0, 0)$ حد ندارد.

حل: در مسیر های مختلفی از قبیل $x = 0$ و $y = 0$ به نقطه ی $(0, 0)$ نزدیک می شویم. در این صورت:

$$\lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} f(x, 0) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2x^2 - 3(0)^2}{x^2 + (0)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{x^2} = 2$$

$$\lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} f(0, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2(0)^2 - 3y^2}{(0)^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-3y^2}{y^2} = -3$$

چون $\lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} f(x, 0) \neq \lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} f(0, y)$ پس این تابع در نقطه ی $(0, 0)$ حد ندارد.

تمرین: نشان دهید تابع $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ در نقطه ی $(0, 0)$ حد ندارد.

حل: ابتدا روی مسیر $y = x$ به نقطه ی $(0, 0)$ نزدیک می شویم.

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + x^2} = \frac{1}{2}$$

حال روی مسیر $y = -x$ به نقطه ی $(0, 0)$ نزدیک می شویم.

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^2}{x^2 + x^2} = -\frac{1}{2}$$

بنابر این $\lim_{(x, y) \rightarrow (a, b)} f(x, y)$ موجود نیست.

نکته: در چنین مسائلی بهتر است روی مسیر $y = mx$ به نقطه ی $(0, 0)$ نزدیک شد و در صورتی که این مقادیر به m

بستگی داشته باشند، تابع حد ندارد. (زیرا با تغییر m مقدار حد تغییر خواهد کرد.)

تمرین: نشان دهید تابع $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ در نقطه ی $(0, 0)$ حد ندارد.

حل: روی مسیر $y = mx$ به نقطه ی $(0, 0)$ نزدیک می شویم. یعنی به جای y مقدار mx را قرار دهیم. خواهیم داشت:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2 + (mx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(1 + m^2)} = \frac{1}{1 + m^2}$$

مشتق جزئی

در این بخش مفهومی نزدیک به مفهوم مشتق توابع یک متغیره را در مورد توابع چند متغیره ارائه می دهیم. از این مفهوم برای شناخت بهتر توابع چند متغیره استفاده می کنیم.

اگر در تابع n متغیره f ، تمام متغیرها به جز یکی از آنها را ثابت نگه داریم، تابعی با یک متغیر خواهیم داشت. مشتق این تابع یک متغیره را یک مشتق جزئی (مشتق نسبی) تابع f می نامند.

تعریف: فرض کنیم f تابعی از دو متغیر x و y باشد. در این صورت حد های زیر را مشتق های جزئی مرتبه ی اول یا به اختصار مشتق جزئی می نامند.

$$\text{مشتق جزئی } f \text{ نسبت به متغیر } x \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$\text{مشتق جزئی } f \text{ نسبت به متغیر } y \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

توجه :

۱ : مشتق جزئی f نسبت به متغیر x را علاوه بر $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ با نماد های $\frac{\partial f}{\partial x}$ یا $f_x(x, y)$ یا f_x نیز نمایش می دهند.

۲ : مشتق جزئی f نسبت به متغیر y را علاوه بر $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ با نماد های $\frac{\partial f}{\partial y}$ یا $f_y(x, y)$ یا f_y نیز نمایش می دهند.

۳ : برای محاسبه ی $\frac{\partial f}{\partial x}$ در تابع $f(x, y)$ متغیر y را ثابت تلقی کرده و از f نسبت به متغیر x مانند یک تابع یک

متغیره مشتق می گیریم.

۴ : برای محاسبه ی $\frac{\partial f}{\partial y}$ در تابع $f(x, y)$ متغیر x را ثابت تلقی کرده و از f نسبت به متغیر y مانند یک تابع یک

متغیره مشتق می گیریم.

۵ : مشتق های جزئی توابع n متغیره نیز به طور مشابه تعریف می شوند.

تمرین: مشتق های جزئی مرتبه ی اول تابع $f(x, y) = ۲x^۴ - ۵y^۴ + ۴x^۲y^۴$ را به دست آورید.

حل :

$$\text{مشتق جزئی } f \text{ نسبت به متغیر } x \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = ۸x^۳ + ۸xy^۴$$

$$\text{مشتق جزئی } f \text{ نسبت به متغیر } y \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = -۱۵y^۳ + ۱۶x^۲y^۳$$

تمرین: مشتق های جزئی مرتبه ی اول تابع $f(x, y, z) = x^۳ \cos z - z \sin y$ را به دست آورید.

حل :

$$\text{مشتق جزئی } f \text{ نسبت به متغیر } x \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = ۳x^۲ \cos z$$

$$\text{مشتق جزئی } f \text{ نسبت به متغیر } y \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = -z \cos y$$

$$\text{مشتق جزئی } f \text{ نسبت به متغیر } z \quad \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = -x^۳ \sin z - \sin y$$

تمرین: مشتق های جزئی مرتبه ی اول تابع $f(x, y, z) = x^۳ + L_n(xy) + \cos \frac{\pi}{۳} z$ را در نقطه ی $(۱, ۱, ۲)$ به

دست آورید.

حل :

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} \Big|_{(۱, ۱, ۲)} = (۳x + \frac{y}{xy}) \Big|_{(۱, ۱, ۲)} = ۳(۱) + \frac{۱}{(۱)(۱)} = ۴$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} \Big|_{(۱, ۱, ۲)} = (\frac{x}{xy}) \Big|_{(۱, ۱, ۲)} = \frac{۱}{(۱)(۱)} = ۱$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \Big|_{(۱, ۱, ۲)} = (-\frac{\pi}{۳} \sin \frac{\pi}{۳} z) \Big|_{(۱, ۱, ۲)} = -\frac{\pi}{۳} \sin \frac{\pi}{۳} (۲) = -\frac{\pi}{۳} \sin \pi = ۰$$

تمرین : فرض کنید $f(x, y) = \frac{2x}{x-y}$ ، مقادیر $f_x(3,1)$ و $f_y(3,1)$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Big|_{(3,1)} = \frac{2(x-y) - 1(2x)}{(x-y)^2} \Big|_{(3,1)} = \frac{-2y}{(x-y)^2} \Big|_{(3,1)} = \frac{-2(1)}{(3-1)^2} \Big|_{(3,1)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Big|_{(3,1)} = \frac{-(x-y) - (-1)(2x)}{(x-y)^2} \Big|_{(3,1)} = \frac{2x}{(x-y)^2} \Big|_{(3,1)} = \frac{2(3)}{(3-1)^2} \Big|_{(3,1)} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

تمرین : فرض کنید $f(x, y, z) = x^2y + y^2z + z^2x$ ، نشان دهید که : $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = (x + y + z)^2$

حل :

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = 2xy + z^2$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = x^2 + 2yz$$

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = y^2 + 2xz$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} &= (2xy + z^2) + (x^2 + 2yz) + (y^2 + 2xz) \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = (x + y + z)^2 \end{aligned}$$

الف : مشتقات جزئی توابع زیر را بدست آورید.

$$1) f(x, y) = x^2y + e^{xy^2} \qquad 2) f(x, y, z) = x^2y^2 + \sin(yz^2)$$

ب : مشتقات جزئی تابع $f(x, y, z) = xyz - L_n(xyz)$ را در نقطه ی $(-2, 1, -3)$ بدست آورید.

مشتق های جزئی مرتبه های بالاتر

نظیر مفهوم مشتق های مرتبه ی بالاتر برای توابع یک متغیره، می توان مشتق های جزئی مرتبه های بالاتر را برای توابع n متغیره تعریف کرد. اگر f تابعی از دو متغیر x و y باشد، آنگاه f_x و f_y نیز تابعی از متغیر های x و y هستند.

بنابراین می توان مشتق های جزئی توابع f_x و f_y را تعریف کرد. این مشتق ها را مشتق های جزئی مرتبه ی دوم تابع

f می نامیم. مشتق های جزئی مرتبه ی دوم تابع f عبارتند از:

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

لازم به ذکر است که ترتیب نوشتن متغیر های x و y در f_{xy} بر خلاف ترتیب آنها در نماد $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ است.

توجه :

۱: در حالت کلی f_{yx} و f_{xy} در نقطه ی (a,b) برابر نیستند ، مگر اینکه تابع در این نقطه پیوسته باشد.

۲: روند محاسبه ی مشتقات جزئی می تواند به همین روند ادامه یابد و مشتقات جزئی مراتب بالاتر را نیز بدست آورد. برای

مثال اگر ابتدا دو بار نسبت به x و یک بار نسبت به y و سپس نسبت به x مشتق بگیریم، آنگاه این مشتق را به سورت

زیر نمایش می دهند.

$$f_{xxyx} = \frac{\partial^4 f}{\partial x \partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \right) \right)$$

تمرین: مشتق های جزئی مرتبه ی دوم تابع $f(x, y) = ye^x + xe^y$ را به دست آورید.

حل :

مشتق های جزئی مرتبه ی اول f

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = ye^x + e^y$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = e^x + xe^y$$

مشتق جزئی مرتبه ی دوم f

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = ye^x$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = e^x + e^y$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = e^x + e^y$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = xe^y$$

تمرین: مشتق های جزئی مرتبه ی دوم تابع $f(x, y, z) = \sin(xy) + \cos z$ را به دست آورید.

حل :

مشتق های جزئی مرتبه ی اول f

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = y \cos(xy)$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos(xy)$$

$$f_z = \frac{\partial f}{\partial z} = -\sin z$$

مشتق جزئی مرتبه ی دوم f

$$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = -y^2 \sin(xy)$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \cos(xy) - xy \sin(xy)$$

$$f_{xz} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 0$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = -x^2 \sin(xy)$$

$$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \cos(xy) - xy \sin(xy)$$

$$f_{yz} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0$$

$$f_{zz} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = -\cos z$$

$$f_{zx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0$$

$$f_{zy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right) = 0$$

دیفرانسیل کل

تعریف : فرض می کنیم f تابعی از دو متغیر x و y باشد. اگر مشتق های جزئی مرتبه ی اول f وجود داشته باشند.

دیفرانسیل کل تابع f را با df نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنند.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

که در آن dx و dy به ترتیب دیفرانسیل متغیر های x و y است.

توجه : دیفرانسیل کل توابع چند متغیره به همین ترتیب تعریف می شود. برای مثال اگر f تابعی از چهار متغیر x و y و z

و t باشد. در این صورت دیفرانسیل کل این تابع به صورت زیر است.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

تمرین : دیفرانسیل کل تابع $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ را بیابید.

حل :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2z$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 2x dx + 2y dy + 2z dz$$

تمرین: فرض کنید $f(x, y) = x + L_n(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})$ ، دیفرانسیل کل تابع را وقتی که $x = 2$ و $y = 3$ و $dx = 1$ و

$dy = -1$ محاسبه کنید.

حل :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + \frac{\frac{1}{2}x}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2}y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \left(1 + \frac{\frac{1}{2}x}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}\right) dx + \left(\frac{\frac{1}{2}y}{x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}}}\right) dy$$

$$df|_{(2,3), dx=1, dy=-1} = \left(1 + \frac{\frac{1}{2}(2)}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}\right)(1) + \left(\frac{\frac{1}{2}(3)}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}\right)(-1) = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

تمرین: دیفرانسیل کل تابع $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$ را به ازای $x = y = -1$ و $dx = 0.1$ و $dy = 0.2$ محاسبه

کنید.

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 3y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 3x$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = (2x - 3y)dx + (2y - 3x)dy$$

$$df|_{(-1,-1), dx=0.1, dy=0.2} = (-2 + 3)(0.1) + (-2 + 3)(0.2) = 0.1 + 0.2 = 0.3$$

تمرین : دیفرانسیل کل تابع $f(x, y, z) = x^2 y + y^2 z$ را در نقطه ی $(2, -1, 2)$ محاسبه کنید.

تمرین : دیفرانسیل کل تابع $f(x, y, z) = e^{xyz}$ را در نقطه ی $(1, 1, 1)$ محاسبه کنید.

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yze^{xyz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xze^{xyz}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xye^{xyz}$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = (yze^{xyz})dx + (xze^{xyz})dy + (xye^{xyz})dz$$

$$df|_{(1,1,1)} = edx + edy + edz = e(dx + dy + dz)$$

قاعده ی زنجیری برای توابع چند متغیره

فرض می کنیم f تابعی از دو متغیر u و v باشد. اگر u و v توابعی از دو متغیر x و y باشند. آنگاه مشتق های جزئی مرتبه ی اول f نسبت به متغیر های x و y به صورت زیر هستند.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

قاعده ی زنجیری برای توابع بیش از دو متغیر به صورت مشابه است.

تمرین: فرض کنید $f(u, v) = uv$ که در آن $u = e^x$ و $v = e^{x^2}$. مطلوبست تعیین $\frac{\partial f}{\partial x}$

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = (v)(e^x) + (u)(2e^{x^2}x)$$

$$= (e^{x^2})(e^x) + (e^x)(2e^{x^2}x) = e^{x^2} + 2e^{x^2}x = 2e^{x^2}x$$

تمرین: فرض کنید $f(u, v) = uv$ که در آن $u = e^x$ و $v = \sin x$. مطلوبست تعیین $\frac{\partial f}{\partial x}$

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = (v)(e^x) + (u)(\cos x)$$

$$= (\sin x)(e^x) + (e^x)(\cos x) = e^x (\sin x + \cos x)$$

تمرین: فرض کنید $f(u, v) = \sin(uv)$ که در آن $u = \sqrt{x}$ و $v = x^2$. مطلوبست تعیین $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = (v \cos(uv))(\frac{1}{2\sqrt{x}}) + (u \cos(uv))(2x)$$

$$= (x^2 \cos(x^2 \sqrt{x}))(\frac{1}{2\sqrt{x}}) + (\sqrt{x} \cos(x^2 \sqrt{x}))(2x) = \frac{1}{2} x^2 \sqrt{x} \cos(x^2 \sqrt{x}) + (2x \sqrt{x} \cos(x^2 \sqrt{x}))$$

تمرین: فرض کنید $f(u, v) = e^{uv}$ که در آن $u = \sin y$ و $v = \cos y$. مطلوبست تعیین $\frac{\partial f}{\partial y}$

حل:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = (ve^{uv})(\cos y) + (ue^{uv})(-\sin y) = e^{uv} (v \cos y - u \sin y)$$

$$= e^{\sin y \cos y} ((\cos y)(\cos y) - (\sin y)(\sin y)) = e^{\sin y \cos y} (\cos^2 y - \sin^2 y)$$

گرادیان

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j}$$

اسکالر بردار

نتیجه نهایی یک بردار است

مثال

تابع f را به فرم $f(x, y, z) = 2x + 3y^2 - \sin(z)$ در نظر بگیرید. گرادیان این تابع را در مختصات کارتزین محاسبه کنید.

برای محاسبه گرادیان این تابع، ابتدا باید رابطه گرادیان در مختصات کارتزین نوشته و سپس مشتق جزئی این تابع در سه راستا محاسبه شود. در نهایت گرادیان این تابع به فرم زیر در می‌آید.

$$\nabla f = 2\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} - \cos(z)\mathbf{k}$$

مثال ۱

تابع اسکالر f با استفاده از رابطه $f(x, y) = x^2y$ تعریف می‌شود. در این شرایط گرادیان این تابع اسکالر را در نقطه $(3, 2)$ محاسبه کنید.

گرادیان این تابع، یک بردار شامل مشتقات جزئی است. مشتق جزئی در راستای x در نقطه داده شده، به فرم زیر محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(3, 2) = 12$$

روند مشابهی را می‌توان برای مشتق جزئی در راستای y نیز مطابق با روابط زیر طی کرد.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(3, 2) = 9$$

در نهایت می‌توان گرادیان این تابع در نقطه داده شده را به کمک مقادیر محاسبه شده مشتق جزئی، به شکل زیر بیان کرد.

$$\nabla f(3, 2) = 12\mathbf{i} + 9\mathbf{j} = (12, 9).$$

مثال ۲

تابع f به فرم $f(x, y, z) = xye^{x^2+z^2-5}$ ، نمایش داده می‌شود. گرادیان این تابع را در نقطه $(1, 3, -2)$ محاسبه کنید.

گرادیان این تابع را می‌توان به صورت مشابه با مثال قبل، از طریق محاسبه مشتق‌های جزئی در سه راستای x ، y و z بیان کرد. بنابراین به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = ((y + 2x^2y)e^{x^2+z^2-5}, xye^{x^2+z^2-5}, 2xyze^{x^2+z^2-5})$$

از آنجایی که گرادیان تابع مورد نظر در نقطه $(1, 3, -2)$ خواسته شده است، این نقطه را در رابطه بالا قرار می‌دهیم. در نتیجه فرم نهایی گرادیان تابع f در نقطه $(1, 3, -2)$ به شکل زیر در می‌آید.

$$\nabla f(1, 3, -2) = (3 + 2(1)^2 3e^0, 1e^0, 2(1)(3)(-2)e^0) = (9, 1, -12)$$

تعریف مشتق جهتی

2 Definition The **directional derivative** of f at (x_0, y_0) in the direction of a unit vector $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ is

$$D_{\mathbf{u}}f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + ha, y_0 + hb) - f(x_0, y_0)}{h}$$

if this limit exists.

محاسبه مشتق جهتی به کمک بردار گرادیان

3 Theorem If f is a differentiable function of x and y , then f has a directional derivative in the direction of any unit vector $\mathbf{u} = \langle a, b \rangle$ and

$$D_{\mathbf{u}}f(x, y) = f_x(x, y)a + f_y(x, y)b$$

$$\nabla_{\vec{v}}f(x, y) = \nabla f \cdot \vec{v}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

$$= v_1 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

If $f(x, y, z) = x \sin yz$, (a) find the gradient of f and (b) find the directional derivative of f at $(1, 3, 0)$ in the direction of $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Solution:

(a) The gradient of f is

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \langle f_x(x, y, z), f_y(x, y, z), f_z(x, y, z) \rangle \\ &= \langle \sin yz, xz \cos yz, xy \cos yz \rangle \end{aligned}$$

(b) At $(1, 3, 0)$ we have $\nabla f(1, 3, 0) = \langle 0, 0, 3 \rangle$.

The unit vector in the direction of $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ is

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k}$$

Therefore Equation 14 gives

$$D_{\mathbf{u}}f(1, 3, 0) = \nabla f(1, 3, 0) \cdot \mathbf{u}$$

$$= 3\mathbf{k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\mathbf{k} \right)$$

$$= 3\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}}$$

انتگرال های چندگانه

در این قسمت مفهوم انتگرال را به توابع چند متغیره تعمیم می دهیم و به ذکر چند کاربرد در مورد انتگرال های دو گانه و همچنین انتگرال های سه گانه می پردازیم. اما در ابتدا انتگرال های مکرر را معرفی می کنیم.

انتگرال های مکرر

عبارت زیر که در آن $f(x, y)$ یک تابع دو متغیره است ، را در نظر بگیرید.

$$\iint f(x, y) dy dx$$

منظور از این نماد این است که تابعی دو متغیره مانند $F(x, y)$ را طوری بیابیم که $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x, y)$ باشد.

برای این کار ابتدا x را ثابت فرض کرده و نسبت به y انتگرال می گیریم. سپس از تابع حاصل، نسبت به x انتگرال گیری می نماییم. به مثال زیر توجه کنید.

$$\iint (2x + y) dy dx = \int (2xy + \frac{1}{2} y^2) dx = \int (2xy + \frac{1}{2} y^2 + c_1) dx = x^2 y + \frac{1}{2} xy^2 + c_1 x + c_2$$

حال اگر قرار دهیم

$$F(x, y) = x^2 y + \frac{1}{2} xy^2 + c_1 x + c_2, \quad f(x, y) = 2x + y$$

واضح است که

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} (x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + xy) = 2x + y = f(x, y)$$

توجه :

۱: ترتیب انتگرال گیری و تعیین متغیر ثابت با توجه به دیفرانسیل متغیر از داخل به بیرون صورت می گیرد.

۲: برای توابع سه متغیره به طور مشابه می توان انتگرال های مکرر را تعیین کرد.

تمرین : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\iint (2x^2 y) dx dy = ?$$

حل:

$$\iint (2x^2 y) dx dy = \int (x^2 y + c_1) dy = \frac{1}{2} x^2 y^2 + c_1 y + c_2$$

تمرین : انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\int \int \int (xyz) dx dy dz = ?$$

حل:

$$\int \int \int (xyz) dx dy dz$$

$$= \int \int \left(\frac{1}{2} x^2 yz + c_1 \right) dy dz = \int \left(\frac{1}{2} x^2 y^2 z + c_1 y + c_2 \right) dz = \frac{1}{6} x^2 y^2 z^2 + c_1 yz + c_2 z + c_3$$

توجه : به طور مشابه می توان انتگرال های مکرر معین را نیز محاسبه نمود. به مثال زیر توجه کنید.

$$\int_0^2 \int_1^2 (xy) dy dx =$$

$$= \int_1^2 (xy^2 + c_1) \Big|_0^2 dx = \int_1^2 [(2x(2)^2 + c_1) - (2x(0)^2 + c_1)] dx = \int_1^2 4x dx$$

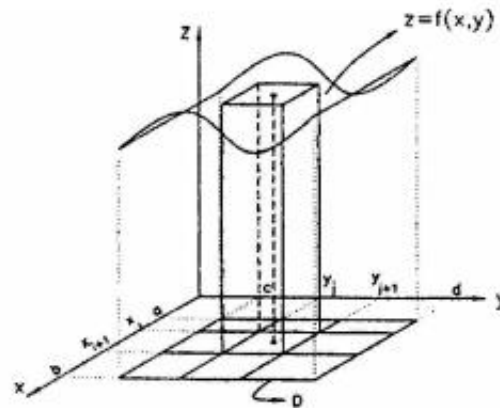
$$= (2x^2 + c_2) \Big|_1^2 = [(2(2)^2 + c_2) - (2(1)^2 + c_2)] = 8 - 2 = 6$$

انتگرال های دوگانه

اگر تابع دو متغیره ی $f(x, y)$ در یک ناحیه مانند D پیوسته و مثبت باشد. در این صورت حجم ناحیه ای که از بالا به رویه ی $z = f(x, y)$ ، از پایین به ناحیه ی مستطیلی D و از طرفین به صفحات $x = a$ و $x = b$ و $y = c$ و $y = d$ محدود باشد، را با $\iint_D f(x, y) dA$ نشان می دهند. ثابت می شود که این حجم با انتگرال های مکرر زیر برابر است.

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

به شکل زیر توجه کنید.



تابع نامنفی $f(x, y)$ روی D

تمرین: انتگرال مکرر $\int_0^1 \left(\int_0^2 (x + 2x^2 y) dy \right) dx$ را محاسبه کنید.

حل:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\int_0^2 (x + 2x^2 y) dy \right) dx &= \int_0^1 (xy + x^2 y^2) \Big|_0^2 dx = \int_0^1 [(x(2) + x^2(2)^2) - (x(0) + x^2(0)^2)] dx \\ &= \int_0^1 (2x + 4x^2) dx = (x^2 + \frac{4}{3}x^3) \Big|_0^1 = ((1)^2 + \frac{4}{3}(1)^3) - ((0)^2 + \frac{4}{3}(0)^3) = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \end{aligned}$$

تمرین: حجم جسم محدود به صفحات مختصات و صفحات $x=2$ و $y=1$ و رویه ی $z = f(x, y) = 2x + y^2$ را

محاسبه کنید.

حل:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f(x, y) dA = \int_0^2 \int_0^1 (2x + y^2) dy dx = \int_0^2 (2xy + \frac{1}{3}y^3) \Big|_0^1 dx \\ &= \int_0^2 [(2x(1) + \frac{1}{3}(1)^3) - (2x(0) + \frac{1}{3}(0)^3)] dx = \int_0^2 (2x + \frac{1}{3}) dx \\ &= (x^2 + \frac{1}{3}x) \Big|_0^2 = ((2)^2 + \frac{1}{3}(2)) - ((0)^2 + \frac{1}{3}(0)) = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \end{aligned}$$

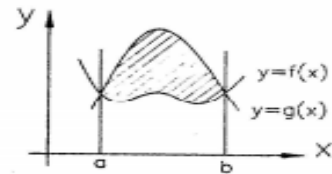
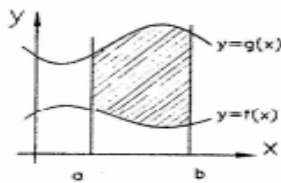
انتگرال های دو گانه روی ناحیه ی دلخواه

تاکنون ناحیه ی انتگرال گیری را مستطیل شکل در نظر می گرفتیم. حال نواحی کلی تری را معرفی کرده و نحوه ی محاسبه ی انتگرال دو گانه روی این نواحی را توضیح می دهیم. در ریاضیات ، **نواحی مقدماتی** را به سه نوع دسته بندی می کنند. در ابتدا این سه نوع ناحیه را در صفحه ی xy تعریف می کنیم.

ناحیه ی مقدماتی نوع اول

اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ در فاصله ی $[a, b]$ پیوسته باشند، آنگاه ناحیه ی زیر را ناحیه ی نوع اول در صفحه ی xy می نامند.

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

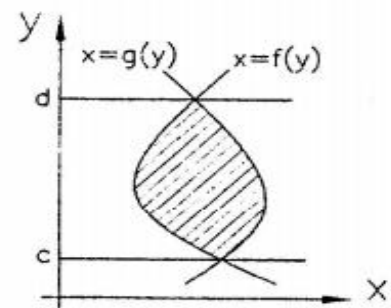
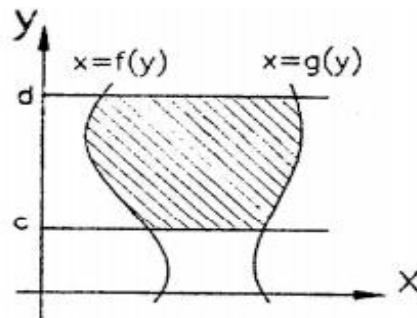


ناحیه ی نوع اول

ناحیه ی مقدماتی نوع دوم

اگر توابع $f(y)$ و $g(y)$ در فاصله ی $[c, d]$ پیوسته باشند، آنگاه ناحیه ی زیر را ناحیه ی نوع دوم در صفحه ی xy می نامند.

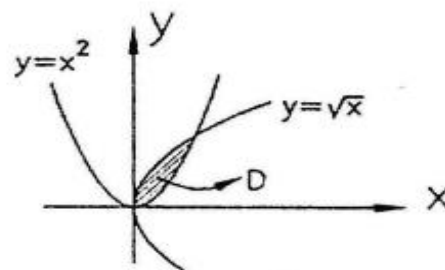
$$D = \{(x, y) \mid f(y) \leq x \leq g(y), c \leq y \leq d\}$$



ناحیه ی نوع دوم

ناحیه ی مقدماتی نوع سوم

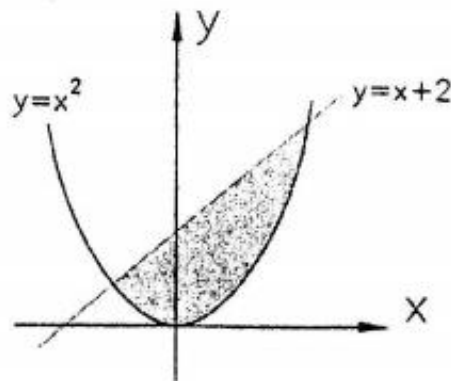
اگر ناحیه ای هم از نوع اول و هم از نوع دوم باشد، آن را ناحیه ی نوع سوم می نامند.



ناحیه ی نوع سوم

تمرین : نوع ناحیه ی محدود به منحنی $y = x^2$ و خط $y = x + 2$ را تعیین کنید.

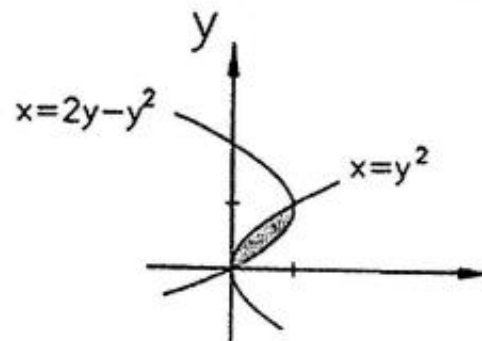
حل : ابتدا نمودار منحنی و خط داده شده را در صفحه ی xy رسم می کنیم.



با توجه به شکل و چون این دو منحنی در نقاطی به طول $x = -1$ و $x = 2$ متقاطع هستند ، پس ناحیه ی مورد نظر از نوع اول است.

تمرین : نوع ناحیه ی محدود به منحنی های $x = y^2$ و $x + y^2 - 2y = 0$ را تعیین کنید.

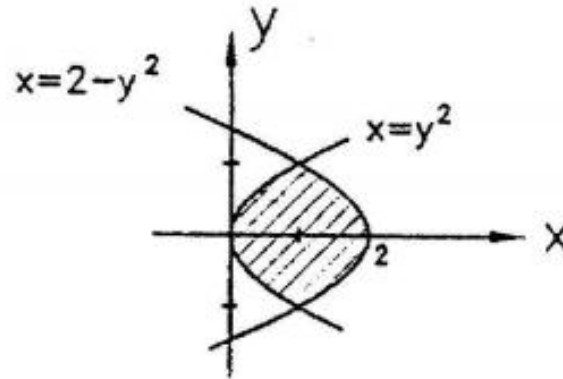
حل : ابتدا نمودار منحنی های داده شده را در صفحه ی xy رسم می کنیم.



این دو منحنی در نقاطی به عرض $y = 0$ و $y = 1$ متقاطع اند، پس ناحیه ی مورد نظر از نوع دوم است.

تمرین: نوع ناحیه ی محدود به منحنی های $x = y^2$ و $x = 2 - y^2$ را تعیین کنید.

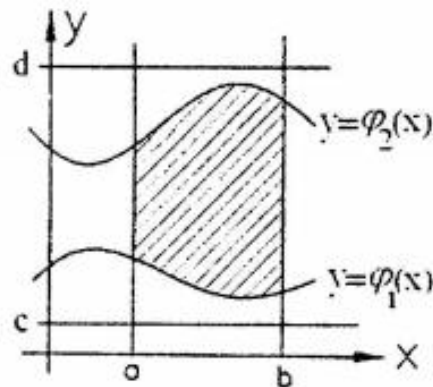
حل: ابتدا نمودار منحنی های داده شده را در صفحه ی xy رسم می کنیم.



این دو منحنی در نقاطی به عرض $y = 1$ و $y = -1$ متقاطع اند، پس ناحیه ی مورد نظر از نوع دوم است.

می توان محاسبه ی انتگرال دو گانه را بوسیله انتگرال های مکرر در یک ناحیه نیز مانند قبل محاسبه کرد. توجه کنید که در

اینجا باید حدود انتگرال را با توجه به نوع ناحیه به شکل صحیح تعیین کرد. برای مثال با توجه به شکل زیر می توان نوشت:



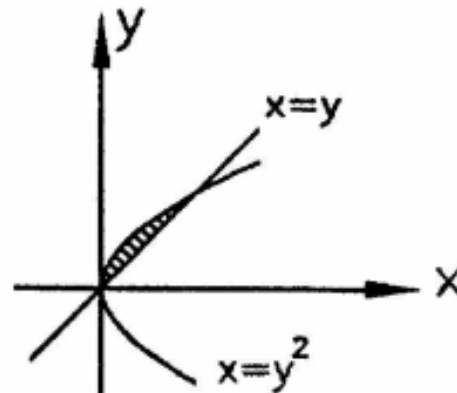
محصول کردن ناحیه ی D در ناحیه ی R

$$\iint_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy dx$$

تمرین: اگر D ناحیه ی محدود به منحنی $x = y^2$ و خط $y = x$ باشد. حاصل انتگرال زیر را محاسبه کنید.

$$\iint_D (xy^2) dA = ?$$

حل: ابتدا نمودار خط و منحنی داده شده را رسم نموده و نوع ناحیه را تعیین می کنیم.



این دو منحنی در نقاطی به طول $x = 0$ و $x = 1$ متقاطع هستند و ناحیه ی انتگرال گیری از نوع سوم است.

لذا به دو روش می توان این انتگرال را محاسبه نمود.

روش اول:

$$\begin{aligned} \iint_D (xy^2) dA &= \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} xy^2 dy dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{3} xy^3 \right) \Big|_x^{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{3} x (\sqrt{x})^3 \right) - \left(\frac{1}{3} x (x)^3 \right) \right] dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (\sqrt{x}^5 - x^7) dx \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} \sqrt{x}^5 - \frac{1}{8} x^8 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{5} - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

کاربردهایی از انتگرال های دو گانه

در این قسمت به چند مورد از کاربرد های انتگرال دو گانه را اشاره می کنیم.

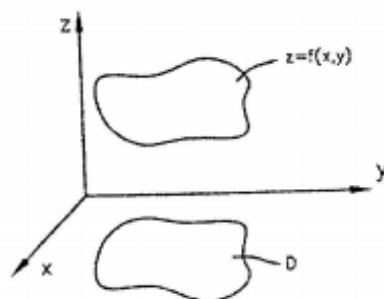
الف : محاسبه ی حجم

با توجه به آنچه که در تعریف انتگرال دوگانه گفته شد، اگر تابع $z = f(x, y)$ در ناحیه ی D مثبت باشد، آنگاه

$$\iint_D f(x, y) dA$$

برابر با حجم جسم استوانه ای شکل است که در بالا به رویه ی $z = f(x, y)$ و از پایین به ناحیه

ی D محدود شده باشد.

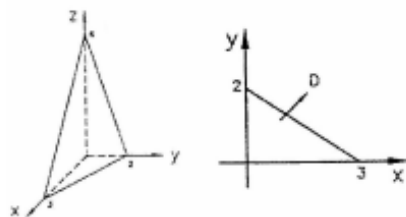


$$V = \iint_D f(x, y) dA$$

تمرین : حجم ناحیه ی محدود به صفحه ی $z = 6 - 2x + 3y$ و صفحات مختصات را محاسبه کنید.

حل: همانطور که در شکل زیر مشاهده می شود، ناحیه ی D از یک طرف به خط $2x + 3y = 6$ و از دو طرف دیگر به

محور های مختصات محدود شده است.



بنابر این:

$$\begin{aligned} V &= \iint_D f(x, y) dA = \int_0^3 \int_0^{\frac{6-2x}{3}} (6 - 2x + 3y) dy dx \\ &= \int_0^3 \left(6y - 2xy + \frac{3}{2}y^2 \right) \Big|_0^{\frac{6-2x}{3}} dx = \int_0^3 \left[6\left(\frac{6-2x}{3}\right) - 2x\left(\frac{6-2x}{3}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{6-2x}{3}\right)^2 \right] dx \\ &= \int_0^3 \left(12 - 4x - 4x + \frac{4}{3}x^2 - 6 + \frac{2}{3}x^2 + 4x \right) dx = \int_0^3 \left(6 - 4x + \frac{2}{3}x^2 \right) dx = \left(6x - 2x^2 + \frac{2}{9}x^3 \right) \Big|_0^3 \\ &= 18 - 18 + 6 = 6 \end{aligned}$$

ب: محاسبه ی مساحت ناحیه ی D

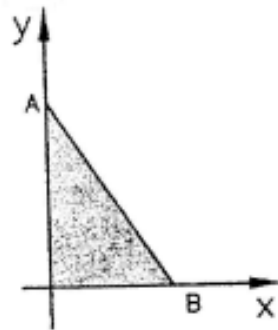
اگر در انتگرال $\iint_D f(x, y) dA$ شرط $f(x, y) = 1$ به ازای هر (x, y) متعلق به ناحیه ی D برقرار باشد، آنگاه حاصل انتگرال دوگانه ی فوق، مساحت ناحیه ی D خواهد بود. به عبارت دیگر مساحت ناحیه ی D از یکی از فرمول های زیر به دست می آید.

$$S = \iint_D dA \quad \text{یا} \quad S = \iint_D dydx \quad \text{یا} \quad S = \iint_D dx dy$$

تمرین: مساحت مثلثی به رئوس $O(0,0)$ و $A(0,3)$ و $B(2,0)$ را محاسبه کنید.

حل: به توجه به شکل، معادله ی خط AB به صورت $3x + 2y = 6$

می باشد. بنابراین:

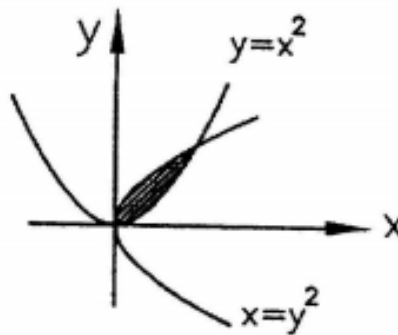


$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \int_0^{\frac{6-3x}{2}} dy dx = \int_0^2 y \Big|_0^{\frac{6-3x}{2}} = \int_0^2 \frac{6-3x}{2} dx \\ &= \left(3x - \frac{3}{4}x^2 \right) \Big|_0^2 = 6 - 3 = 3 \end{aligned}$$

تمرین: مساحت ناحیه ی محدود به دو منحنی $x = y^2$ و $y = x^2$ را محاسبه کنید.

حل: نقاط برخورد این دو منحنی $(0,0)$ و $(1,1)$ می باشند.

بنابراین



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} dx dy = \int_0^1 x \Big|_{y^2}^{\sqrt{y}} dy \\ &= \int_0^1 (\sqrt{y} - y^2) dy = \left(\frac{2}{3}\sqrt{y}^3 - \frac{1}{3}y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

انتگرال های سه گانه

مشابه آنچه که در مورد انتگرال های دوگانه گفته شد، می توان انتگرال سه گانه را به صورت زیر تعریف نمود.

فرض کنید تابع سه متغیره ی $f(x, y, z)$ روی ناحیه ی مکعب مستطیل شکل

$$R = \{(x, y, z) | a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2, a_3 \leq z \leq b_3\}$$

پیوسته باشد. در این صورت:

$$\iiint_R f(x, y, z) dV = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f(x, y, z) dz dy dx$$

لازم به ذکر است که انتگرال های مکرر با توجه به ترتیب $dx dy dz$ به شش صورت می توان نوشت.

تمرین: انتگرال سه گانه ی $\iiint_R (x + y) dV$ را که در آن

$$R = \{(x, y, z) | 0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 1 \leq z \leq 2\}$$

را محاسبه کنید.

حل:

$$\begin{aligned} \iiint_R (x + y) dV &= \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_1^2 (x + y) dz dy dx \\ &= \int_0^1 \int_{-1}^1 (xz + yz) \Big|_1^2 dy dx = \int_0^1 \int_{-1}^1 [(2x + 2y) - (x + y)] dy dx = \int_0^1 \int_{-1}^1 (x + y) dy dx \\ &= \int_0^1 (xy + \frac{1}{2} y^2) \Big|_{-1}^1 dx = \int_0^1 [(x + \frac{1}{2}) - (-x + \frac{1}{2})] \Big|_{-1}^1 dx = \int_0^1 (2x) dx \\ &= x^2 \Big|_0^1 = 1 \end{aligned}$$

مثال ۱: نوع معادلات زیر را مشخص کنید.

۱) $5yx^2 + y^3e^x - 4 = 0$

۲) $x^2 y'' - 4xe^y + 1 = 0$

۳) $y^2 + x \int_0^x y(t) dt - 4 = 0$

در این بخش از آموزش ریاضیات به مبحث آموزشی معادلات دیفرانسیل می پردازیم:

هر معادله که شامل یک متغیر x , تابع آن متغیر y و مشتقات تابع نسبت به متغیر تابع $(y^{(n)}, \dots, y, y')$ باشد به یک معادله دیفرانسیل معمولی موسوم است. برای مثال معادله زیر یک معادله دیفرانسیل می باشد:

$$y' - 3x = 0$$

لزومی ندارد که در یک معادله دیفرانسیل کلیه ی پارامترهای ذکر شده موجود باشد، فقط وجود مشتق یا مشتقات تابع در معادله ضروری می باشد.

معادله دیفرانسیل، رابطه ای میان تابع، مشتقات آن و متغیرهای مستقل اش است. بنابراین ما خواهیم توانست، انواع محاسبات را انجام دهیم، از هر پدیده ای نموداری به منظور توصیف آن تهیه کنیم و حتی قادر خواهیم بود آینده را پیش بینی کنیم!

$$y + \frac{dy}{dx} = 5x$$

نمونه ای از یک معادله دیفرانسیل که شامل تابع y و مشتقش است.

حل:

. ثابت کنید تابع $y = \sin x$ ، یک جواب معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ است؟

حل شدن یک معادله دیفرانسیل به چه معناست؟

زمانی یک معادله دیفرانسیل حل شده است که تابع y بر حسب متغیرهای وابسته‌اش پیدا شده باشد. به طور دقیق‌تر، یعنی اینکه بدانیم مثلاً y که تابعی از متغیر x در نظر گرفته شده، طبق کدام رابطه توصیف می‌شود. روش‌های متفاوتی به منظور حل یک معادله دیفرانسیل وجود دارند، اما در ابتدا بایستی بدانیم که چرا معادلات دیفرانسیل مهم هستند.

$$\text{الف) } y = e^{-x}, \quad y' + y = 0$$



$$\text{داریم: } y = e^{-x}, \quad y' = -e^{-x}$$

در نتیجه با جایگذاری داریم:

$$y' + y = e^{-x} - e^{-x} = 0$$

$$\text{پ) } y = e^x + 2, \quad f'(x) = f''(x)$$



$$y' = y'' \Rightarrow y'' = e^x \text{ و } y' = e^x \Rightarrow y = e^x + 2$$

حل:
حل:

$$(y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x \Rightarrow y'' = -\sin x) \xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله}} y'' + y = -\sin x + \sin x = 0$$

پس $y = \sin x$ در معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ صدق می‌کند.

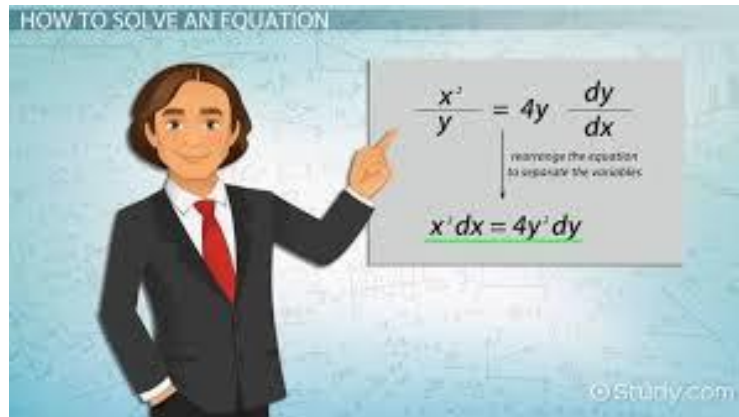
معادلات دیفرانسیل مرتبه ی اول

همانطور که قبلاً داشتیم معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول ، معادله ی دیفرانسیلی است که بالاترین مرتبه ی مشتق موجود در آن ، یک باشد. یعنی این معادله شامل متغیر مستقل x تابع y و مشتق مرتبه ی اول آن y' می باشد. برای مثال معادله ی زیر یک معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول است.

$$x + 2y' = 3y$$

منظور از حل معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول یافتن تابعی است که خود و مشتق مرتبه ای اول آن در معادله صدق می کند.

1. معادلات تفکیک پذیر



معادلات دیفرانسیل تفکیک پذیر (جدایی پذیر)

هر معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول به شکل $m(x)dx + n(y)dy = 0$ را که در آن m و n دو تابع حقیقی پیوسته باشند، را تفکیک پذیر یا جدایی پذیر می نامند. به سادگی با انتگرال گیری از این معادله ، جواب عمومی آن به شکل زیر به دست می آید.

$$\int m(x)dx + \int n(y)dy = c$$

مثال : معادله ی $(2x + 1)dx + 3y^2 dy = 0$ یک معادله ی جدایی پذیر است. لذا می توان جواب عمومی آن را به شکل زیر تعیین کرد.

$$(2x + 1)dx + 3y^2 dy = 0 \rightarrow \int (2x + 1)dx + \int 3y^2 dy = c \rightarrow x^2 + x + y^3 = c \rightarrow y^3 = c - x^2 - x \\ \rightarrow y = \sqrt[3]{c - x^2 - x}$$

Separable Differential Equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x+3}$$

تمرین: نشان دهید که معادله ی دیفرانسیل $x^2 y^2 dx - dy = 0$ تفکیک پذیر است. سپس آن را حل کنید.

حل :

$$x^2 y^2 dx - dy = 0 \xrightarrow{\div y^2} x^2 dx - \frac{1}{y^2} dy = 0$$

لذا این معادله تفکیک پذیر است. پس می توان جواب عمومی آن را به شکل زیر تعیین کرد.

$$\int x^2 dx - \int \frac{1}{y^2} dy = c \rightarrow \int x^2 dx - \int y^{-2} dy = c \rightarrow x^3 + y^{-1} = c$$

$$\rightarrow x^3 + \frac{1}{y} = c \rightarrow \frac{1}{y} = c - x^3 \rightarrow y = \frac{1}{c - x^3}$$

تمرین: معادله ی دیفرانسیل $x(1+y^2)dx + \frac{y}{x}dy = 0$ را حل کنید.

حل : دو طرف معادله را x ضرب و سپس بر $1+y^2$ تقسیم می کنیم.

$$x^2 dx + \frac{y}{1+y^2} dy = 0 \rightarrow \int x^2 dx + \int \frac{y}{1+y^2} dy = c \rightarrow \int x^2 dx + \frac{1}{2} \int \frac{2y}{1+y^2} dy = c$$

$$\rightarrow x^3 + \frac{1}{2} \ln |1+y^2| = c$$

تمرین: معادله ی دیفرانسیل $y' = \frac{x-1}{2y-3}$ را حل کنید.

حل: کافی است $\frac{dy}{dx}$ را به جای y' قرار دهیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{2y-3} \rightarrow (x-1)dx - (2y-3)dy = 0 \rightarrow \int (x-1)dx - \int (2y-3)dy = c$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - y^2 + 3y = c$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}$$

تعریف : تابع دو متغیره ی $f(x, y)$ را همگن از درجه ی n (n یک عدد صحیح است.) می نامند، هرگاه وجود داشته باشد t حقیقی به طوری که:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

تابع همگن چند متغیره نیز به شکل مشابه تعریف می شود.

مثال : تابع $f(x, y) = 2x^2y - 3x^3 + \frac{y^5}{x^2}$ همگن از درجه ی ۳ است. زیر به ازای هر t داریم.

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= 2(tx)^2(ty) - 3(tx)^3 + \frac{(ty)^5}{(tx)^2} \\ &= 2t^3x^2y - 3t^3x^3 + t^3\frac{y^5}{x^2} = t^3(2x^2y - 3x^3 + \frac{y^5}{x^2}) = t^3f(x, y) \end{aligned}$$

تمرین برای حل : ثابت کنید که هر یک از توابع زیر همگن هستند و سپس درجه ی آنها را تعیین کنید.

$$۱) f(x, y) = x^5 - x^2y^3 + y^5$$

$$۵) f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$۲) f(x, y, z) = xy + yz + xz$$

$$۶) f(x, y, z) = x \sin\left(\frac{y}{z}\right)$$

$$۳) f(x, y, z) = xyz$$

$$۷) f(x, y) = xye^{\frac{x}{y}}$$

$$۴) f(x, y) = 2$$

$$۸) f(x, y) = \cos \frac{x}{y}$$

تعریف: هر معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول به شکل $m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0$ را که در آن m و n دو تابع همگن از یک درجه باشند، را **همگن** می نامند. ثابت می شود که با تغییر متغیر $y = xv$ می توان معادله ی همگن را تبدیل به یک معادله ی دیفرانسیل جدایی پذیر نمود و سپس حل کرد.

$$\begin{cases} y = xv \\ dy = vdx + xdv \end{cases}$$

مثال: معادله ی دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$(y^2 - 2xy)dx + 2x^2 dy = 0$$

واضح است این معادله همگن می باشد. زیر دو تابع $m(x, y) = y^2 - 2xy$ و $n(x, y) = 2x^2$ همگن از درجه ۲ هستند.

$$m(x, y) = y^2 - 2xy$$

$$\rightarrow m(tx, ty) = (ty)^2 - 2(tx)(ty) = t^2 y^2 - 2t^2 xy = t^2 (y^2 - 2xy) = t^2 m(x, y)$$

$$n(x, y) = 2x^2$$

$$\rightarrow n(tx, ty) = 2(tx)^2 = 2t^2 x^2 = t^2 n(x, y)$$

حال قرار می دهیم:

$$y = xv$$

$$\rightarrow dy = (vdx + xdv)$$

با قرار دادن این تساوی ها در معادله ی دیفرانسیل داده شده به دست می آوریم.

$$(y^2 - 2xy)dx + 2x^2 dy = 0$$

$$\rightarrow (x^2 v^2 - 2x^2 v)dx + 2x^2 (xdv + vdx) = 0 \rightarrow x^2 v^2 dx + 2x^2 dv = 0$$

$$\xrightarrow{\div x^2 v^2} \frac{1}{x} dx + \frac{2}{v} dv = 0$$

معادله ی اخیر یک معادله ی جدایی پذیر است و با انتگرال گیری مستقیم از این معادله داریم:

$$\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2}{v} dv = c \rightarrow L_n |x| - \frac{2}{v} = c$$

اینک در این جواب قرار می دهیم $v = \frac{y}{x}$ به دست می آوریم.

$$L_n |x| - \frac{2x}{y} = c \rightarrow y = \frac{2x}{L_n |x| - c}$$

مثال بیشتر از معادلات همگن

تمرین: معادله ی دیفرانسیل $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$ را حل کنید.

حل: ابتدا نشان می دهیم که توابع $m(x, y) = x^2 + y^2$ و $n(x, y) = xy$ همگن از یک درجه هستند.

$$m(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\rightarrow m(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 m(x, y)$$

$$n(x, y) = xy$$

$$\rightarrow n(tx, ty) = (tx)(ty) = t^2(xy) = t^2 n(x, y)$$

پس معادله ی داده شده همگن است. حال قرار می دهیم:

$$y = xv$$

$$\rightarrow dy = (vdx + xdv)$$

با قرار دادن این تساوی ها در معادله ی دیفرانسیل داده شده به دست می آوریم.

$$(x^2 + x^2 v^2)dx - (x^2 v)(vdx + xdv) = 0$$

$$\rightarrow x^2(1 + v^2)dx - x^2(v^2 dx + vdv) = 0 \xrightarrow{\div x^2} (1 + v^2)dx - (v^2 dx + vdv) = 0$$

$$\rightarrow dx - vdv = 0 \xrightarrow{\div x} \frac{1}{x}dx - vdv = 0$$

معادله ی اخیر یک معادله ی جدایی پذیر است و با انتگرال گیری مستقیم از این معادله داریم:

$$\int \frac{1}{x} dx - \int v dv = c \rightarrow L_n |x| - \frac{1}{2} v^2 = c$$

اینک در این جواب قرار می دهیم $v = \frac{y}{x}$ به دست می آوریم.

$$L_n |x| - \frac{1}{2} \left(\frac{y}{x}\right)^2 = c \rightarrow L_n |x| - \frac{y^2}{2x^2} = c$$

مثال از معادلات همگن

تمرین : معادله ی دیفرانسیل $y' = \frac{x-y}{x+y}$ را حل کنید.

حل : ابتدا $\frac{dy}{dx}$ را جایگزین y' می کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y} \rightarrow (x-y)dx - (x+y)dy = 0$$

حال نشان می دهیم که توابع $m(x, y) = x - y$ و $n(x, y) = x + y$ همگن از یک درجه هستند.

$$m(x, y) = x - y$$

$$\rightarrow m(tx, ty) = (tx) - (ty) = t(x - y) = t m(x, y)$$

$$n(x, y) = x + y$$

$$\rightarrow n(tx, ty) = (tx) + (ty) = t(x + y) = t n(x, y)$$

پس معادله ی داده شده همگن است. حال قرار می دهیم:

$$y = xv$$

$$\rightarrow dy = (vdx + xdv)$$

با قرار دادن این تساوی ها در معادله ی دیفرانسیل داده شده به دست می آوریم.

$$(x - xv)dx - (x + xv)(vdx + xdv) = 0 \rightarrow \frac{1}{x}dx - \frac{1+v}{1-2v-v^2}dv = 0$$

معادله ی اخیر یک معادله ی جدایی پذیر است و با انتگرال گیری مستقیم از این معادله داریم:

$$\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1+v}{1-2v-v^2}dv = c \rightarrow L_n |x| + \frac{1}{2} L_n (1-2v-v^2) = c$$

اینک در این جواب قرار می دهیم $v = \frac{y}{x}$ به دست می آوریم.

$$L_n |x| + \frac{1}{2} L_n (1 - \frac{2y}{x} - \frac{y^2}{x^2}) = c$$

تمرین : معادله ی دیفرانسیل $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$ را با شرط اولیه ی $y(1) = 0$ حل کنید.

حل : ابتدا نشان می دهیم که توابع $m(x, y) = x + y$ و $n(x, y) = x - y$ همگن از یک درجه هستند.

$$m(x, y) = x + y$$

$$\rightarrow m(tx, ty) = (tx) + (ty) = t(x + y) = t m(x, y)$$

$$n(x, y) = x - y$$

$$\rightarrow n(tx, ty) = (tx) - (ty) = t(x - y) = t n(x, y)$$

پس معادله ی داده شده همگن است. حال قرار می دهیم:

$$y = xv$$

$$\rightarrow dy = (vdx + xdv)$$

با قرار دادن این تساوی ها در معادله ی دیفرانسیل داده شده به دست می آوریم.

$$(x + xv)dx + (x - xv)(vdx + xdv) = 0$$

$$\rightarrow (1 + 2v - v^2)dx + x(1 - v)dv = 0 \xrightarrow{\div x(1+2v-v^2)} \frac{1}{x}dx + \frac{1-v}{1+2v-v^2}dv = 0$$

معادله ی اخیر یک معادله ی جدایی پذیر است و با انتگرال گیری مستقیم از این معادله داریم: