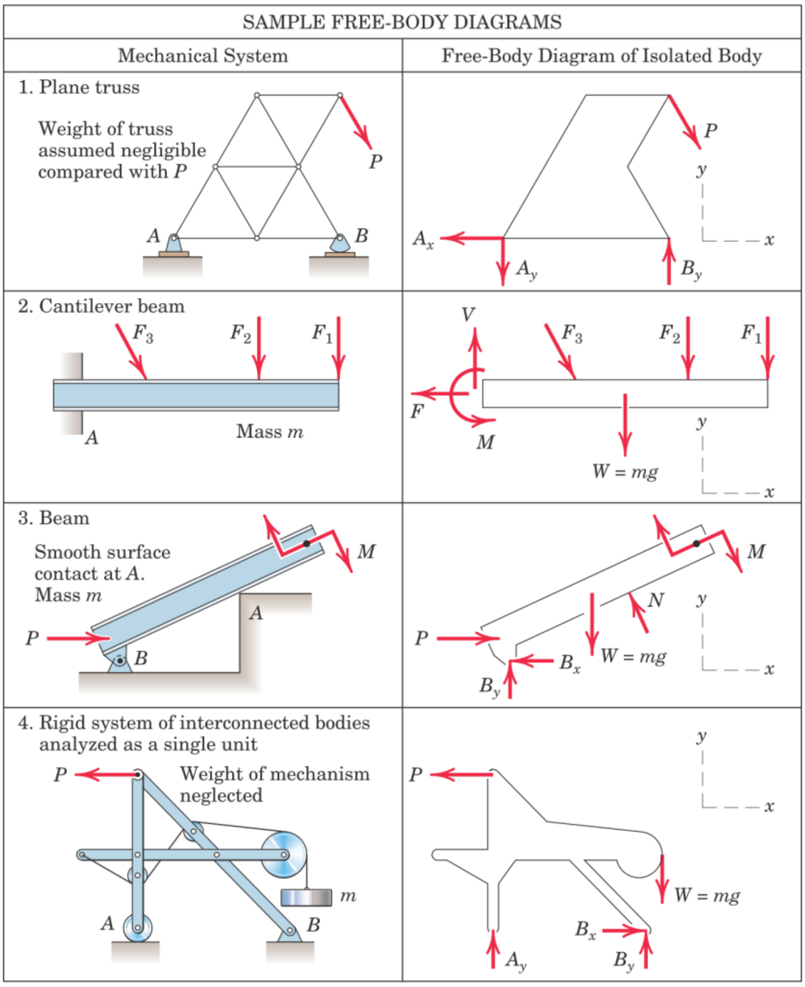
جزوه درس استاتیک

(بی یر- جانستون و ...)



Ninth Edition

CHAPTER

1

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS:

STATICS

Ferdinand P. Beer

E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:

J. Walt Oler

Texas Tech University

مقدمه

سرفصل مطالب

فصل اول : تعاریف

1- تعریف علم مکانیک
2- تقسیم بندی علم مکانیک
3- قوانین نیوتن
4- سیستم واحدها

فصل دوم: استاتیک ذره – نیروهای صفحه ای

1- تعریف نیرو
2- اصل اول استاتیک (قانون متوازی الاضلاع)
3- تجزیه و ترکیب نیروها
4- مؤلفه های یک نیرو در مختصات قائم
5- برآیند دو یا چند نیرو به روش ترسیمی
6- برآیند دو یا چند نیرو به روش تحلیلی
7- تعادل یک نقطه مادی (تعادل ذره)
8- مؤلفه های یک نیروی فضایی به روش اسکالر
9- مؤلفه های یک نیروی فضایی به روش برداری
10- برآیند نیروهای فضایی
11- تعادل ذره در فضا

سرفصل مطالب

فصل سوم: سیستم نیروهای فضایی

1- ضرب داخلی دو بردار فضایی
2- تعیین زاویه دو بردار فضایی
3- تصویر یک بردار روی امتداد دلخواه
4- ضرب خارجی دو بردار فضایی
5- گشتاور یک نیروی فضایی حول یک نقطه
6- گشتاور یک نیروی فضایی حول یک محور
7- قضیه وارینیون
8- گشتاور زوج نیرو (گشتاور کوپل)
9- انتقال نیرو به موازات خود
10- سیستم کوپل نیروی معادل

فصل چهارم: تعادل اجسام صلب

1- نمودار آزاد اجسام
2- معادلات تعادل در مسائل دوبعدی و سه بعدی
3- انواع تکیه گاه
4- تعیین عکس العمل تکیه گاهی
5- تعادل اجسام دو نیرویی و سه نیرویی
6- تعیین نیرو و گشتاور در قاب های ساده

سرفصل مطالب

فصل پنجم: مرکز هندسی، گشتاور اول سطح و نیروهای گسترده

۱– مرکز جرم (مرکز ثقل)
۲– مرکز هندسی سطوح
۳– گشتاور اول سطح
۴– نیروهای گسترده روی تیرها (تبدیل نیروی گسترده به متمرکز)

فصل ششم: تحلیل سازه (خرپا)

۱– تعریف خرپا
۲– تحلیل خرپا به روش تعادل مفصل (روش گره)
۳– تحلیل خرپا به روش برش (روش مقاطع)

سرفصل مطالب

فصل هفتم: تحلیل تیرها

۱– نیروهای داخلی در تیرها
۲– تعیین نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی با روش برش
۳– روابط میان بار، نیروی برشی و گشتاور خمشی
۴– تعیین نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی با روش سطح زیر منحنی

فصل نهم: گشتاور اینرسی (گشتاور لختی) (ممان اینرسی)

۱– تعریف گشتاور دوم سطح
۲– گشتاور دوم سطح برای سطوح متعارف
۳– قانون محورهای موازی
۴– گشتاور دوم سطح برای سطوح مرکب

تعریف علم مکانیک

تعریف علم مکانیک: مکانیک شاخه ای از علم فیزیک است که در رابطه با سکون یا حرکت اجسام تحت اثر نیرو بحث می کند. علم مکانیک در بسیاری زمینه ها نظیر ارتعاشات، پایداری و مقاومت سازه ها و ساختمان ها، ماشین ها، راکت ها، هواپیماها، موتورهای احتراقی، جریان سیالات و ماشین های الکتریکی کاربرد دارد.

تقسیم بندی علم مکانیک: برحسب نوع مسائل مکانیک متشکل از استاتیک و دینامیک است.

۱– استاتیک؛ یا علم ایستایی عبارتست از علم تعادل اجسام تحت بار.

۲– دینامیک؛ علم حرکت اجسام که خود شامل سینماتیک و سینتیک است.

از نظر ماهیت اجسام مکانیک به دو بخش زیر تقسیم می شود:

۱– مکانیک اجسام تغییرشکل پذیر و تغییرشکل ناپذیر

۲– مکانیک سیالات

قوانین نیوتن

قوانین نیوتن

قانون اول نیوتن: اگر برآیند نیروهای وارد بر ذره ای صفر باشد ذره درحال سکون است. (در این حالت اگر ذره دارای حرکت مستقیم الخط یکنواخت باشد با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می دهد).

قانون دوم نیوتن: شتاب یک ذره متناسب با برآیند نیروهای وارد برآن است (یا نیرو متناسب با حاصلضرب جرم در شتاب حرکت است).

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

قانون سوم نیوتن: نیروهای عمل و عکس العمل بین دو جسم درتماس از لحاظ مقدار با هم برابر و دریک امتداد و با جهت مخالف می باشد.

سیستم واحدها:

در سیستم های اندازه گیری کمیتهای اصلی عبارتند از: طول، جرم و زمان.

در سیستم بین المللی (جهانی) SI **واحدهای کمیت های اصلی عبارتند از:**

واحد طول متر (m)**، واحد جرم کیلوگرم** (kg) **و واحد زمان ثانیه** (s) **می‌باشد.**

بنابراین واحدهای فرعی بصورت زیر تعیین می شود:

...

Ninth Edition

CHAPTER

2

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS:

STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

Statics of Particles

استاتیک ذرات

فصل دوم

فصل دوم: استاتیک ذره – نیروهای صفحه ای

۱– تعریف نیرو

۲– اصل اول استاتیک (قانون متوازی الاضلاع)

۳– تجزیه و ترکیب نیروها

۴– مؤلفه های یک نیرو در مختصات قائم

۵– برآیند دو یا چند نیرو به روش ترسیمی

۶– برآیند دو یا چند نیرو به روش تحلیلی

۷– تعادل یک نقطه مادی (تعادل ذره)

۸– مؤلفه های یک نیروی فضایی به روش اسکالر

۹– مؤلفه های یک نیروی فضایی به روش برداری

۱۰– برآیند نیروهای فضایی

۱۱– تعادل ذره در فضا

مفاهیم و اصول پایه‌ای

کمیّت های فیریکی:

۱– کمیت های عددی(اسکالر) : فقط با مقدار مشخص می گردد مانند: دما، کار، انرژی، حجم و سطح ...

۲–کمیت های برداری : علاوه برمقدار توسط راستا ، جهت و نقطه اثر مشخص می‌گردد مانند: نیرو، سرعت، تغییر مکان، شتاب و گشتاور.

تعریف نیرو (Force) :

تاثیر یک جسم روی جسم دیگر نیرو نامیده می شود. نیرو عاملی است که باعث تغییرشکل یا تغییر حرکت یا سکون جسم می گردد. نیرو بردار است.

مشخصات نیرو

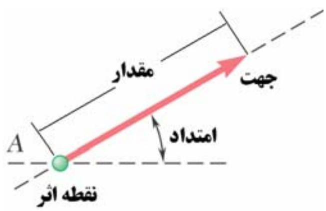
مشخصات نیرو:

۱– راستای (امتداد)

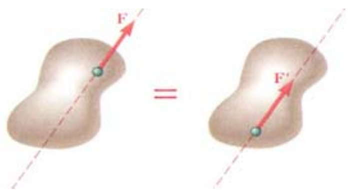
۲– جهت

۳– بزرگی (قدر مطلق) (مقدار)

۴– نقطه اثر



اصل قابلیت انتقال نیرو: چون در استاتیک اجسام را صلب فرض می کنیم لذا نیرو را می توان روی امتدادش جابجا کرد.

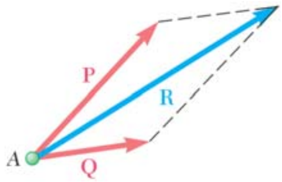


بنابراین مشخصه نیرو فقط راستا، جهت و مقدار است.

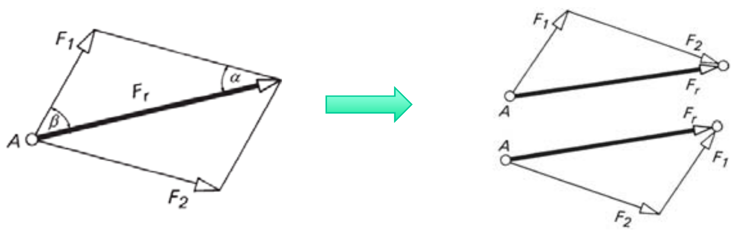
قانون متوازی الاضلاع

اصل اول استاتیک (قانون متوازی الاضلاع):

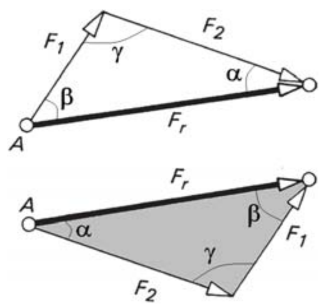
به جای دو نیروی مؤثر در یک جسم صلب می توان یک نیرو معادل با آن دو نیرو قرار داد. این نیرو قطر متوازی الاضلاعی است که با آن دونیرو ساخته می شود و از محل تقاطع دو امتداد نیرو می گذرد.



R **معادل (برایند)** P **و** Q **است.**



قانون سینوسها و کسینوسها برای مثلث



$$\frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{F_r}{\sin\gamma}$$

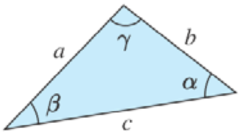
قانون سینوسها

$$F_r^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\gamma$$

قانون کسینوسها

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

قانون سینوسها و کسینوسها برای مثلث

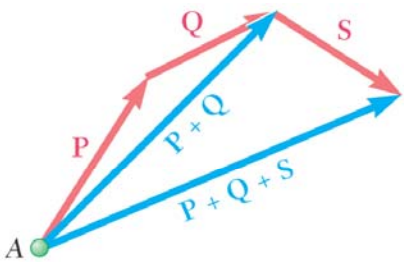


Law of sines	$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$
Law of cosines	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

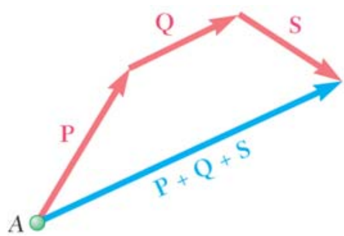
قانون متوازی الاضلاع - چند ضلعی نیروها

چند ضلعی نیروها:

بر اساس قانون متوازی الاضلاع میتوان تک تک نیروها را به دنبال هم ترسیم کرده و برایند نیروها را (بارسم چند ضلعی نیروها) بدست آورد.

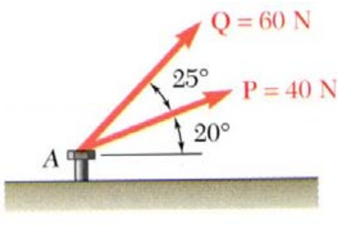


قانون متوازی الاضلاع



چند ضلعی نیروها

مثال 1 (ترکیب یا برایند دو نیرو)

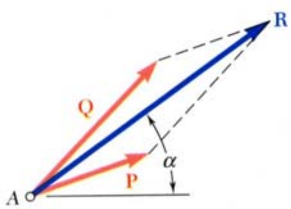


مثال ۱ – دو نیروی ۴۰ و ۶۰ نیوتونی مطابق شکل به پیچ مقابل اعمال شده است. مطلوبست:

الف) تعیین برایند این دو نیرو

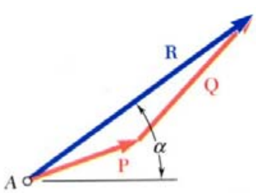
ب) تعیین امتداد برایند

حل به روش ترسیمی (ترسیم متوازی الاضلاع و چند ضلعی نیروها):



۱ – بعد از ترسیم متوازی الاضلاع، طول بردار برآیند و امتداد آن اندازه گیری می‌شود.

$\boxed{\mathbf{R} = 98\text{ N} \quad \alpha = 35^\circ}$

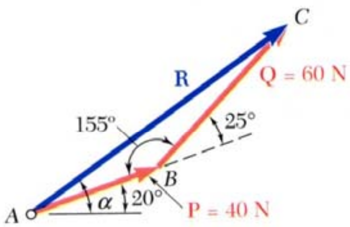


۲– بعد از ترسیم نیروها به دنبال هم، طول بردار برآیند و امتداد آن اندازه گیری می‌شود.

$\boxed{\mathbf{R} = 98\text{ N} \quad \alpha = 35^\circ}$

حل به روش مثلثاتی:

ترسیم مثلث نیروها و نوشتن قانون کسینوسها



$$R^2 = P^2 + Q^2 - 2PQ\cos B$$

$$R^2 = (40\text{N})^2 + (60\text{N})^2 - 2(40\text{N})(60\text{N})\cos 155°$$

$$\boxed{R = 97.73\text{N}}$$

سپس از قانون سینوسها داریم:

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R}$$

$$\sin A = \sin B \frac{Q}{R}$$

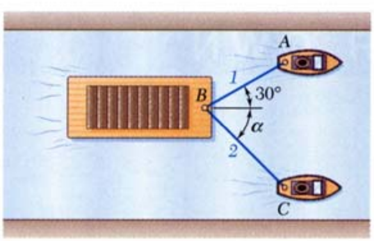
$$\sin A = \sin 155° \frac{60\text{N}}{97.73\text{N}} = 0.26$$

$$A = 15.04°$$

$$\alpha = 20° + A$$

$$\boxed{\alpha = 35.04°}$$

مثال دوم (تجزیه یک نیرو روی دو امتداد معلوم):



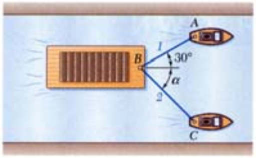
مثال ۲ – قایق B **توسط دو یدک کش** A **و** C **کشیده می‌شود.**

اگر برایند نیروهای وارد بر قایق B **در امتداد افق و برابر** 25kN **باشد مطلوبست:**

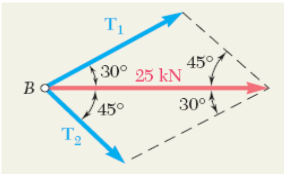
الف) تعیین کشش در هر کابل برای $\alpha = 45°$

ب) زاویه α **برای اینکه کشش در کابل ۲ حداقل باشد.**

حل الف) :

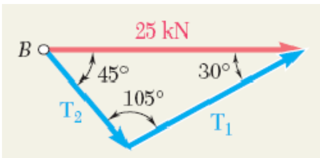


حل به روش ترسیمی: بعد از ترسیم متوازی الاضلاع و اندازه گیری اضلاع متوازی الاضلع داریم:



$$\boxed{T_1 = 18.5 \text{ kN} \quad T_2 = 13 \text{ kN}}$$

حل به روش مثلثاتی و استفاده از قانون سینوسها:

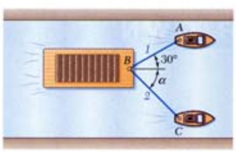


$$\frac{T_1}{\sin 45°} = \frac{T_2}{\sin 30°} = \frac{25 \text{ kN}}{\sin 105°}$$

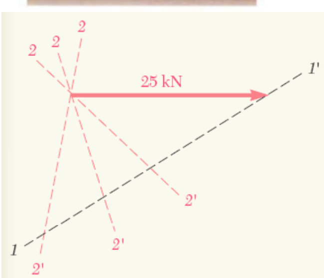
$$\boxed{T_1 = 18.3 \text{ kN} \quad T_2 = 12.94 \text{ kN}}$$

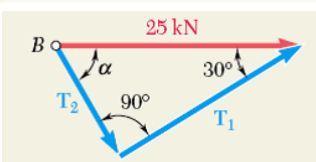
حل ب):

با اعمال قانون مثلث و بررسی α های مختلف ، حداقل کشش در امتداد۲ بدست می آید.



بر اساس شکل مقابل، حداقل کشش در امتداد ۲ وقتی اتفاق می افتد که T_1 و T_2 برهمدیگر عمود باشند.





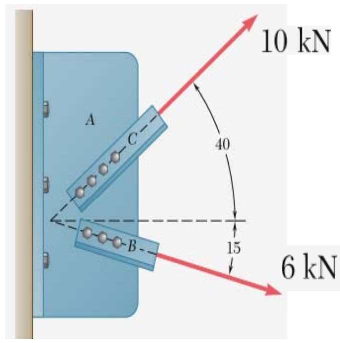
$$T_2 = (25 \text{ kN})\sin 30° \qquad \boxed{T_2 = 12.5 \text{ kN}}$$

$$T_1 = (25 \text{ kN})\cos 30° \qquad \boxed{T_1 = 21.7 \text{ kN}}$$

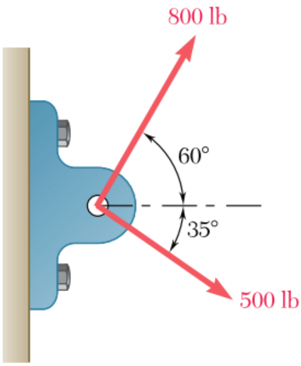
$$\alpha = 90° - 30° \qquad \boxed{\alpha = 60°}$$

تمرین (تکلیف منزل) :

در شکل های داده شده، نیروی برایند و امتداد آن را با روش ترسیمی و مثلثاتی بدست آورید.



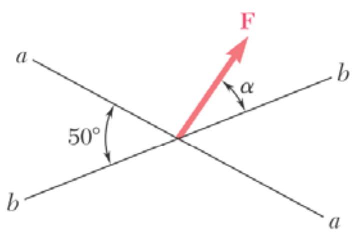
14.3 kN ⦣ 19.9°



906 lb ⦣ 26.6°

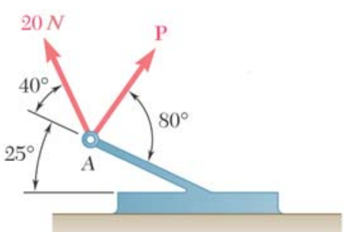
تمرین (تکلیف منزل) :

۱– نیروی F برابر ۱۰۰ نیوتن روی دو امتداد *a-a* و b-b تجزیه شده است. اگر مولفه *a* برابر ۷۰ نیوتن باشد، زاویه α و مولفه امتداد b را بدست آورید.



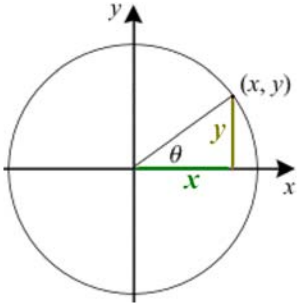
32.4 Deg and 129.4 N

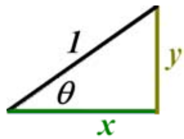
۲– مقدار نیروی P طوری تعیین کنید که برایند دو نیروی اعمال شده به A قائم باشد. برایند را نیز تعیین کنید.



P =14.73 N ; R= 30.2 N

دایره مثلثاتی - مثلث قائم الزاویه - مولفه‌های قائم یک نیرو

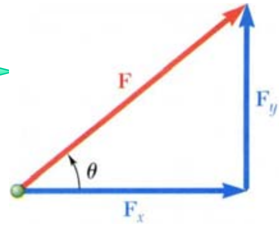




$$\cos\theta = \frac{x}{1} = x$$

$$\sin\theta = \frac{y}{1} = y$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



$$F_x = F \times \cos\theta$$

$$F_y = F \times \sin\theta$$

$$\tan\theta = \frac{F_y}{F_x}$$

در مثلث قائم الزاویه:

وتر ضلعی است که روبروی زاویه قائم قرار دارد که بلندترین ضلع مثلث نیز می باشد.

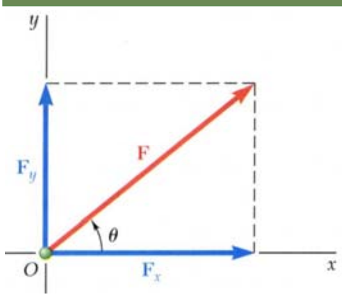
نسبت ضلع مقابلِ زاویه ، به وتر را سینوس می‌گویند.

نسبت ضلع مجاورِ زاویه، به وتر را کسینوس می‌گویند.

نسبت ضلع مقابلِ زاویه به ضلع مجاورِ زاویه را تانژانت گویند.

2 - 17

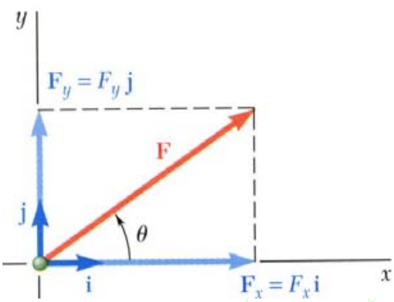
مولفه های عمودی یک نیرو - بردار واحد (توضیح شفاهی)



میتوان یک نیرو را به مولفه های عمودی تجزیه کرد. در این صورت متوازی الاضلاع نیروها یک مستطیل (دو مثلث قائم الزاویه)خواهد بود. اضلاع مثلث قائم الزاویه مولفه های نیرو در جهت x و y هستند که بصورت زیر تعیین می‌شوند:

$$\boxed{\begin{aligned} F_x &= F \times \cos\theta \\ F_y &= F \times \sin\theta \end{aligned}}$$

F و θ معلوم اند

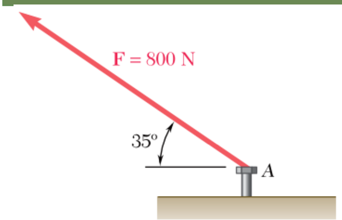


نیروی F را میتوان بوسیله مولفه های قائم و به کمک بردارهای یکه بصورت زیر نشان داد.

$$\boxed{\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j}}$$

2 - 18

مثال:

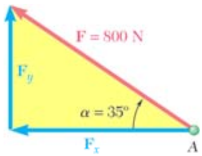


نیرویی برابر ۸۰۰ نیوتن مطابق شکل به پیچ A اثر می‌کند.

مطلوبست:

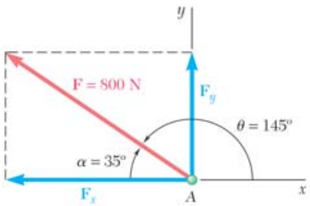
الف) تعیین مولفه های عمودی نیرو

ب) بیان برداری نیرو



حل: الف

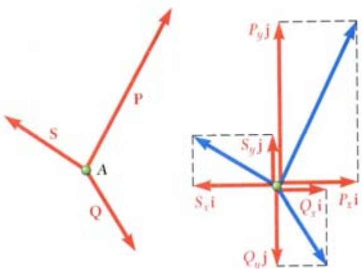
$$F_x = -F \times \cos\alpha = 800 \times \cos 35 = -655\,N$$
$$F_y = F \times \sin\alpha = 800 \times \sin 35 = 459\,N$$



حل: ب

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} = -655\vec{i} + 459\vec{j}$$

ترکیب (برایند) نیروها، با استفاده از مولفه‌های قائم آنها:



برایند ۳ نیروی P و Q و S را تعیین کنید (تعیین نیروی R).

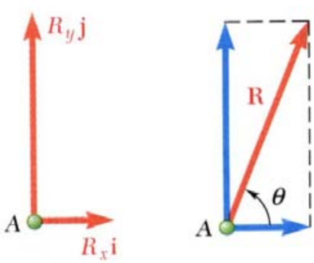
چون نیرو بردار است، جمع (ترکیب) آنها بصورت برداری زیر انجام می‌شود:

$$\vec{R} = \vec{P} + \vec{Q} + \vec{S}$$

اگر بجای هر نیرو، مولفه های قائم آن را قرار دهیم، داریم:

$$R_x\vec{i} + R_y\vec{j} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + Q_x\vec{i} + Q_y\vec{j} + S_x\vec{i} + S_y\vec{j}$$
$$= (P_x + Q_x + S_x)\vec{i} + (P_y + Q_y + S_y)\vec{j}$$

نتیجه می شود که مولفه های برایند، با جمع مولفه های نیروها برابر است. یعنی:



$$R_x = P_x + Q_x + S_x \qquad R_y = P_y + Q_y + S_y$$

$$R_x = \sum F_x \qquad R_y = \sum F_y$$

سپس برای پیدا کردن برایند نیروها و جهت آن داریم:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}$$

تعیین برایند دو یا چند نیرو:

بنابراین برای تعیین برایند دو یا چند نیرو میتوان به دو روش زیر عمل کرد:

۱– روش برداری (ترسیم بردار نیرو ها به دنبال هم)

$$\vec{R}=\vec{P}+\vec{Q}+\vec{S}$$

۲– روش اسکالر (استفاده از مولفه های قائم)

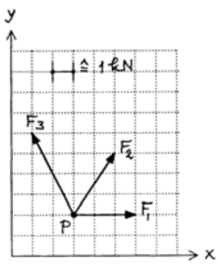
$$R_x=\sum F_x \qquad R_y=\sum F_y \quad \Rightarrow \quad R=\sqrt{R_x^2+R_y^2} \quad \Rightarrow \quad \theta=\tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}$$

مثال:

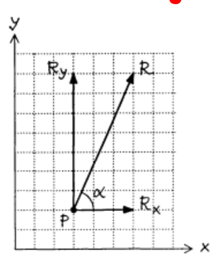
مثال– سه نیرو مطابق شکل به نقطه P اثر می‌کند. مطلوبست:

الف) تعیین برایند این سه نیرو به روش مجموع مولفه های قائم (اسکالر).

ب) تعیین برایند این سه نیرو به روش ترسیمی (برداری).



حل: الف



$$R_x=F_{x;1}+F_{x;2}+F_{x;3}=(3\text{ kN})+(2\text{ kN})+(-2\text{ kN})=3\text{ kN}$$

$$R_y=F_{y;1}+F_{y;2}+F_{y;3}=(0\text{ kN})+(3\text{ kN})+(4\text{ kN})=7\text{ kN}.$$

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2}=\sqrt{(3\text{ kN})^2+(7\text{ kN})^2}=\sqrt{58}\text{ kN}.$$

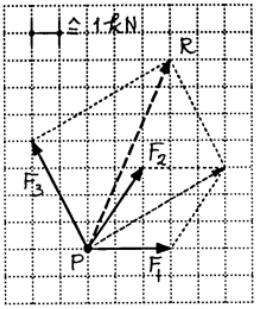
$$\tan\alpha=\frac{R_y}{R_x}=\frac{7\text{ kN}}{3\text{ kN}}=2.33\Rightarrow\alpha=66.8^\circ$$

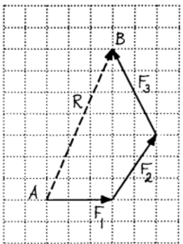
ادامه حل:

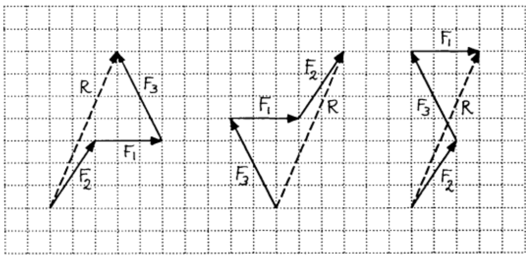
حل: ب

۱– با ترسیم مکرر متوازی الاضلاع نیروها

۲– با ترسیم چند ضلعی نیروها





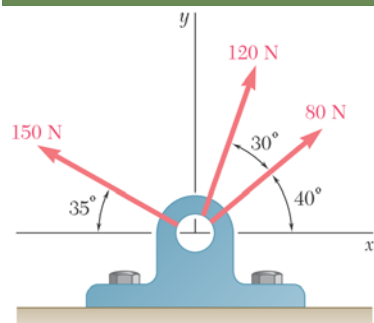


مثال:

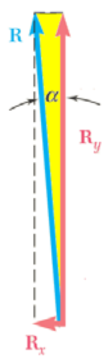
مثال– سه نیرو مطابق شکل به یاتاقان اثر می‌کند. مطلوبست:

الف) تعیین برایند این سه نیرو .

ب) تعیین امتداد برایند.



حل: الف



$$R_x = \sum F_x = 80\cos 40 + 120\cos 70 - 150\cos 35 = -20.55 \quad N$$

$$R_y = \sum F_y = 80\sin 40 + 120\sin 70 + 150\sin 35 = 250.22 \quad N$$

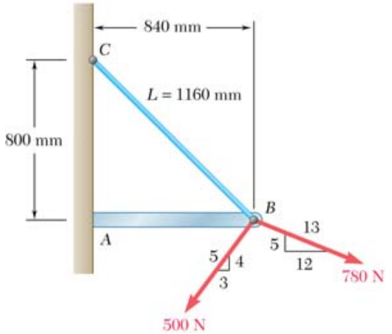
$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-20.55)^2 + 250.22^2} = 251 \quad N$$

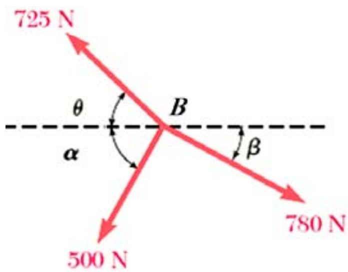
حل: ب

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\frac{20.55}{250.22} = 4.7^\circ$$

مثال:

مثال– کشش در کابل BC برابر ۷۲۵ نیوتن می‌باشد. برایند سه نیروی اعمال شده به نقطه B را (به روش اسکالر) بدســـت آورید.



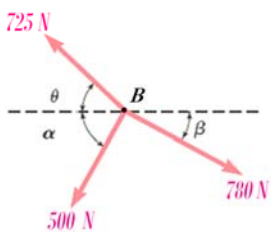


حل) ابتدا با توجه به شکل ، سینوس و کسینوس زاویه ها بصورت زیر تعیین می شود.

$$\sin\beta = \frac{5}{13}$$
$$\cos\beta = \frac{12}{13}$$
$$\sin\alpha = \frac{4}{5}$$
$$\cos\alpha = \frac{3}{5}$$
$$\sin\theta = \frac{800}{1160}$$
$$\cos\theta = \frac{840}{1160}$$

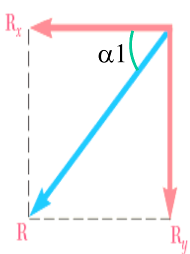
مثال:

$$\sin\beta = \frac{5}{13} \qquad \cos\beta = \frac{12}{13} \qquad \sin\alpha = \frac{4}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{3}{5} \qquad \sin\theta = \frac{800}{1160} \qquad \cos\theta = \frac{840}{1160}$$



Magnitude, N	x Component, N	y Component, N
725	−525	500
500	−300	− 400
780	720	− 300
	$R_x = -105$	$R_y = -200$

$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} \qquad \mathbf{R} = (-105\ \text{N})\mathbf{i} + (-200\ \text{N})\mathbf{j}$



تعیین مقدار و جهت برایند:

$$\tan\alpha_1 = \frac{-R_y}{-R_x} = \frac{200\,\text{N}}{105\,\text{N}} \qquad \alpha_1 = 62.3^\circ$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 225.9\text{N}$$

تعادل یک نقطه مادی (تعادل ذره)

طبق قانون اول نیوتن، برایند نیروهای وارد بر یک ذره در حال تعادل صفر است. لذا داریم:

چه موقع برایند نیروها صفر است؟

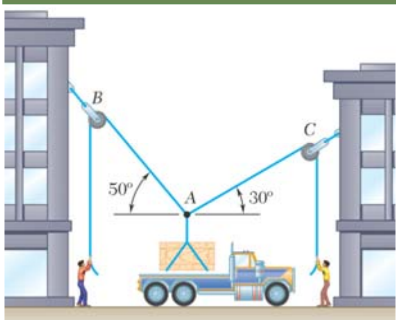
$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \Rightarrow 1- & \text{ترسیم چند ضلعی بسته نیروها} \\ \Rightarrow 2- \begin{cases} R_x = 0 \Rightarrow \sum F_x = 0 \\ R_y = 0 \Rightarrow \sum F_y = 0 \end{cases} & \text{استفاده از معادلات تعادل} \end{cases}$$

بنابراین برای حل مسائل به روش تعادل ذره، باید یک نقطه مادی را در نظر بگیریم و ابتدا نمودار آزاد نقطه را ترسیم نموده به یکی از دو روش فوق عمل کنیم. یعنی:

۱– نیروهای وارد بر نقطه مادی را بدنبال یکدیگر ترسیم کرده و چند ضلعی بسته‌ای را ترسیم کنیم.

۲– معادلات تعادل را برای نیروهای وارد بر نقطه مادی بنویسیم.

مثال:



مثال– بار ۷۳۶ نیوتنی نشان داده شده، توسط دو کابل AC و AB نگه داشته شده است. مطلوبست تعیین نیروی کششـــی در هریک از این دو کابل.

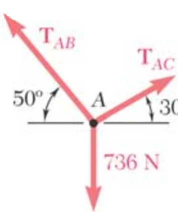
حل) در حل مسائل به روش تعادل به یکی از دو صورت زیر عمل می شود.

(روش اول) ترسیم چند ضلعی بسته نیروها :

۱– ترسیم نمودار آزاد

۲– ترسیم چند ضلعی بسته نیروها

۳– تعیین نیروهای مجهول به کمک قوانین SIN و COS



(روش دوم) استفاده از معادلات تعادل :

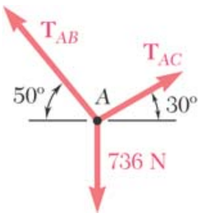
۱– ترسیم نمودار آزاد

۲– نوشتن معادلات تعادل

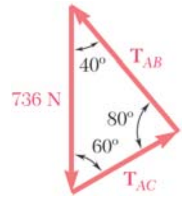
۳– تعیین نیروهای مجهول به کمک حل این معادلات

ادامه حل:

نمودار آزاد نقطه A :



چند ضلعی بسته نیروها:



روابط مثلثاتی:

$$\frac{T_{AB}}{\sin 60^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 40^\circ} = \frac{736\text{ N}}{\sin 80^\circ}$$

$$T_{AB} = 647\text{ N} \qquad T_{AC} = 480\text{ N}$$

نوشتن معادلات تعادل:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -T_{AB}\cos 50 + T_{AC}\cos 30 = 0 \\ T_{AB}\sin 50 + T_{AC}\sin 30 - 736 = 0 \end{cases}$$

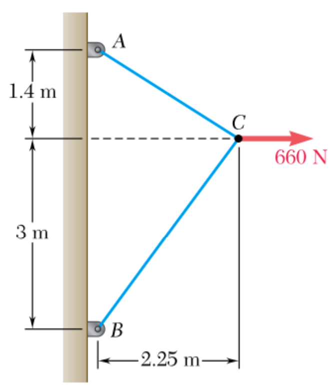
حل معادلات تعادل:

$$\begin{cases} T_{AB} = 1.347\, T_{AC} \\ (1.347\, T_{AC})\sin 50 + T_{AC}\sin 30 = 736 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{AB} = 647\, N \\ T_{AC} = 480\, N \end{cases}$$

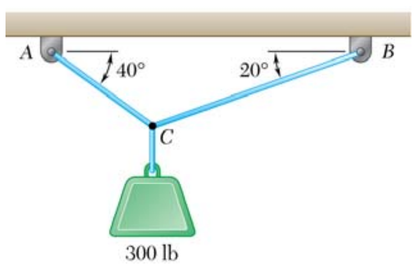
تمرین (تکلیف منزل) :

۱و۲– در شکل های داده شده، نیروی کشش در کابلهای AC و BC را بدست آورید.

(از روش تعادل – هم با ترسیم چند ضلعی نیروها و هم با نوشتن معادلات تعادل)



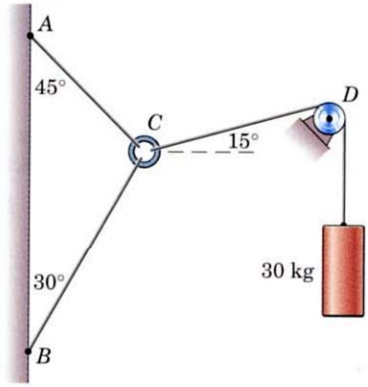
(Ans) : T AC = 530 N, T BC = 350 N.



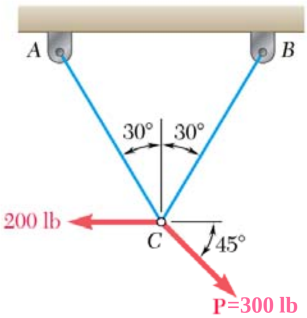
(Ans) : T AC = 326 lb, T BC = 265 lb.

تمرین (تکلیف منزل) :

۳و۴– کشش در کابلهای AC وBC را بدست آورید. (هم با ترسیم چند ضلعی نیروها و هم با نوشتن معادلات تعادل)



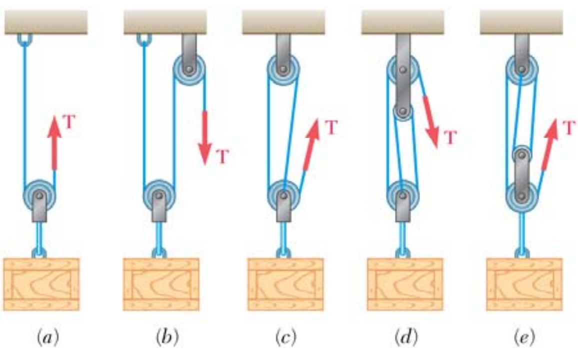
(Ans) : $T_{AC} = 215$ N , $T_{BC} = 264$ N



(Ans) : $T_{AC} = 134.6$ lb , $T_{BC} = 110.4$ lb.

مثال: (از تعادل نقطه مادی) – مساله 2-67 (توضیح)

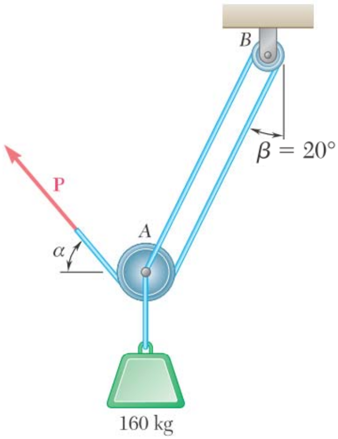
اگر جرم بـــار 250kg باشــد، کشش در کابل (T) را برای هر حالت بدست آورید.



Ans: (a) 1226 N. (b) 1226 N. (c) 817 N. (d) 817 N. (e) 613 N.

مثال: (از تعادل نقطه مادی) – مساله 2-65 (توضیح)

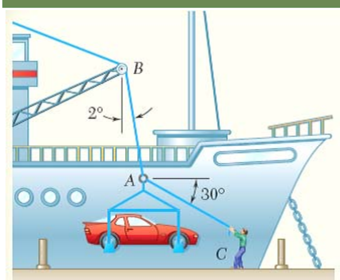
مقدار و امتداد نیروی P را تعیین کنید.

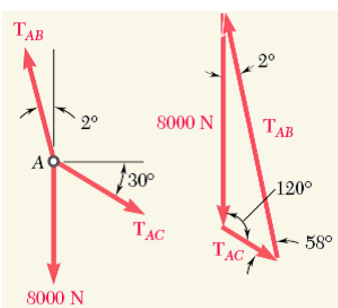


(*a*) 602 N ∠ 46.8°. (*b*) 1365 N ∠ 46.8°.

مثال: (از تعادل نقطه مادی) – (توضیح)

وزن اتوموبیل ۸۰۰۰ نیوتن است. کشش در کابلهای AC و AB را بدست آورید.





بانوشتن رابطه سینوسها داریم:

$$\frac{T_{AB}}{\sin 120°} = \frac{T_{AC}}{\sin 2°} = \frac{8000\text{N}}{\sin 58°}$$

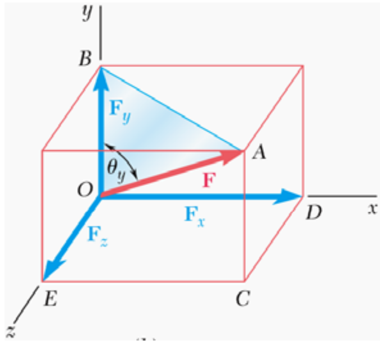
$$\boxed{T_{AB} = 8170\text{N}}$$

$$\boxed{T_{AC} = 329\text{N}}$$

نیرو در فضا (نمایش یک نیروی فضایی)

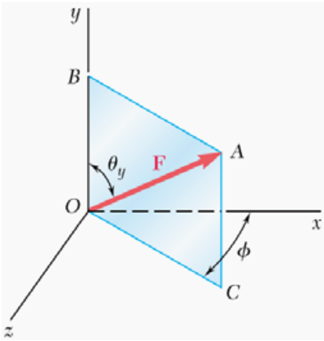
تا اینجا، با مسائل دو بعدی (صفحه‌ای) آشنا شدیم. نیروی فضایی علاوه بر مولفه های x و y ، روی محور z نیز مولفه دارد. اگر در شکل مقابل زاویه ϕ صفر باشد یک نیروی صفحه‌ای خواهیم داشت.

برای تعیین مولفه های یک نیروی فضایی، صفحه‌ای از آن عبور داده و آنرا به یک نیروی صفحه ای تبدیل می‌کنیم.



معلومات: $|F|\ ,\ \theta_x\ ,\ \theta_y\ ,\ \theta_z$

مجهولات: $F_x\ ,\ F_y\ ,\ F_z$

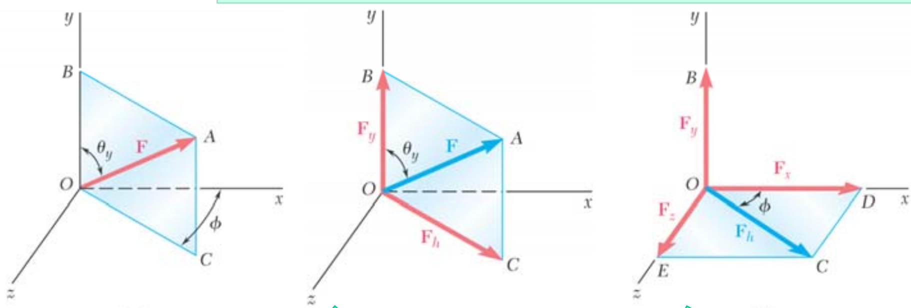


معلومات: $|F|\ ,\ \theta_y\ ,\ \phi$

مجهولات: $F_x\ ,\ F_y\ ,\ F_z$

مولفه های قائم یک نیروی در فضا (مولفه های یک نیروی فضایی)

مولفه‌های نیروی فضایی F را روی محورهای x و y و z بدست آورید.



(a) (b) (c)

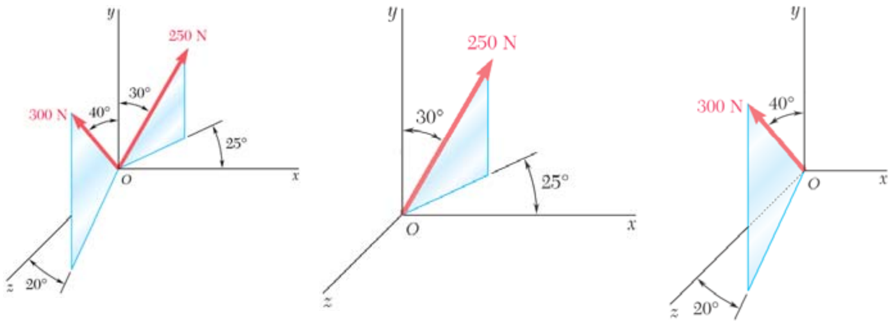
۱– تجزیه نیروی F در امتداد افق و قائم:

$$F_y = F\cos\theta_y$$
$$F_h = F\sin\theta_y$$

۲– تجزیه نیروی افقی Fh به مولفه‌های قائم:

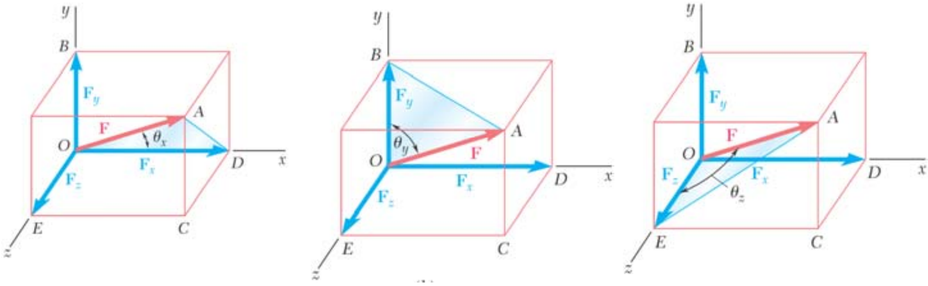
$$F_x = F_h\cos\phi = F\sin\theta_y\cos\phi$$
$$F_z = F_h\sin\phi = F\sin\theta_y\sin\phi$$

مثال:



(*a*) $F_x = 113.3$ N, $F_y = 217$ N, $F_z = -52.8$ N.
(*b*) $\theta_x = 63.1°$, $\theta_y = 30.0°$, $\theta_z = 102.2°$.
(*a*) $F_x = 65.9$ N, $F_y = 230$ N, $F_z = 181.2$ N.
(*b*) $\theta_x = 77.3°$, $\theta_y = 40.0°$, $\theta_z = 52.8°$.

مولفه های قائم یک نیروی در فضا (مولفه های یک نیروی فضایی)



$F_x = F\cos\theta_x$ $\quad$ $F_y = F\cos\theta_y$ $\quad$ $F_z = F\cos\theta_z$

$$F_x = F\cos\theta_x$$
$$F_y = F\cos\theta_y$$
$$F_z = F\cos\theta_z$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

$$\cos^2\theta_x + \cos^2\theta_y + \cos^2\theta_z = 1$$

EXAMPLE 2.4 A force of 500 N forms angles of 60°, 45°, and 120°, respectively, with the x, y, and z axes. Find the components F_x, F_y, and F_z of the force.

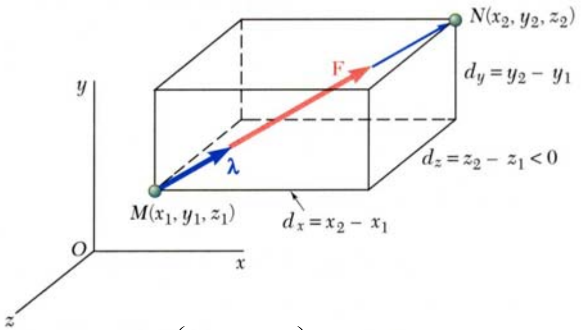
Substituting $F = 500$ N, $\theta_x = 60°$, $\theta_y = 45°$, $\theta_z = 120°$ into formulas (2.19), we write

$$F_x = (500 \text{ N}) \cos 60° = +250 \text{ N}$$
$$F_y = (500 \text{ N}) \cos 45° = +354 \text{ N}$$
$$F_z = (500 \text{ N}) \cos 120° = -250 \text{ N}$$

Carrying into Eq. (2.20) the values obtained for the scalar components of **F**, we have

$$\mathbf{F} = (250 \text{ N})\mathbf{i} + (354 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{k}$$

مولفه های یک نیروی فضایی (با معلوم بودن قدرمطلق نیرو و دو نقطه از راستای آن)



$$d_x = x_2 - x_1$$
$$d_y = y_2 - y_1$$
$$d_z = z_2 - z_1$$
$$\vec{d} = d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}$$
$$d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

$$F_x = F\cos\theta_x = F\left(\frac{\text{مجاور ضلع}}{\text{وتر}}\right) = F\frac{d_x}{d}$$
$$F_y = F\cos\theta_y = F\left(\frac{\text{مجاور ضلع}}{\text{وتر}}\right) = F\frac{d_y}{d}$$
$$F_z = F\cos\theta_z = F\left(\frac{\text{مجاور ضلع}}{\text{وتر}}\right) = F\frac{d_z}{d}$$

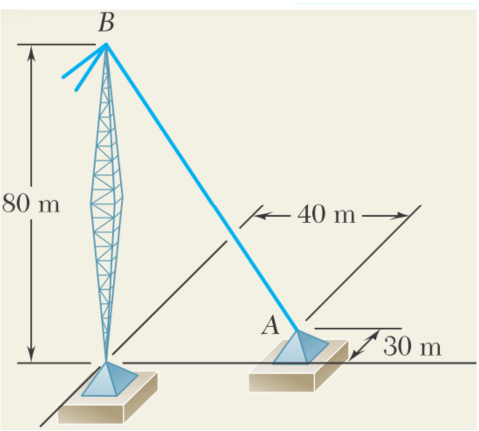
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$
$$\vec{F} = \frac{F}{d}\left(d_x\vec{i} + d_y\vec{j} + d_z\vec{k}\right)$$
$$\boxed{\vec{F} = \frac{F}{d}\left[(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}\right]}$$

مثال

نیروی کشش در کابل AB برابر ۲۵۰۰ نیوتن است. مطلوبست:

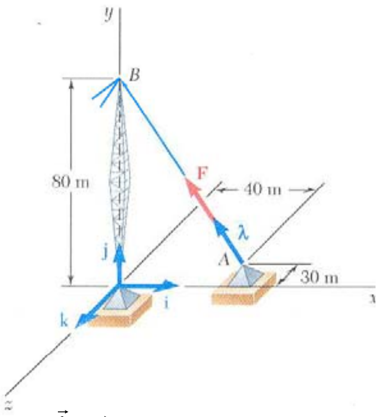
الف) مولفه های این نیرو که به پیچ A اثر می‌کند (F_x, F_y, F_z).

ب) زاویه امتداد این نیرو نسبت به محورهای x و y و z ($\theta_x, \theta_y, \theta_z$).



حل :

تعیین بردار AB (A به سمت B) :



$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-40)\vec{i} + (80)\vec{j} + (30)\vec{k}$$

$$d = AB = \sqrt{(-40)^2 + (80)^2 + (30)^2} = 94.3 \text{ m}$$

$$\vec{F} = \frac{F}{d}\left[(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}\right]$$

$$\vec{F} = \frac{2500}{94.3}\left[-40\vec{i} + 80\vec{j} + 30\vec{k}\right]$$

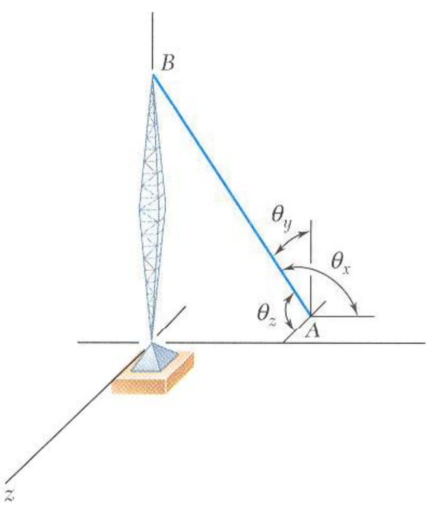
$$\boxed{\vec{F} = -1060\vec{i} + 2120\vec{j} + 795\vec{k}}$$

$$\vec{\lambda} = \vec{u}_{AB}$$

$$\vec{u}_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{d} = \left(\frac{-40}{94.3}\right)\vec{i} + \left(\frac{80}{94.3}\right)\vec{j} + \left(\frac{30}{94.3}\right)\vec{k}$$

$$\vec{u}_{AB} = -0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k}$$

ادامه حل:



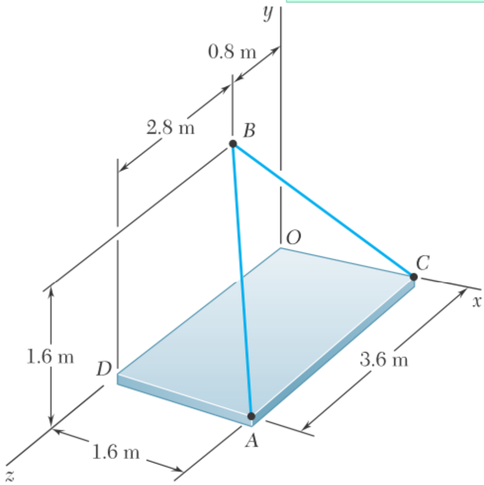
$$\vec{\lambda} = \cos\theta_x\,\vec{i} + \cos\theta_y\,\vec{j} + \cos\theta_z\vec{k}$$

$$= -0.424\vec{i} + 0.848\vec{j} + 0.318\vec{k}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\theta_x &= \cos^{-1}(-0.424) = 115.1^\circ \\ \theta_y &= \cos^{-1}(0.848) = 32.0^\circ \\ \theta_z &= \cos^{-1}(0.318) = 71.5^\circ\end{aligned}}$$

مثال

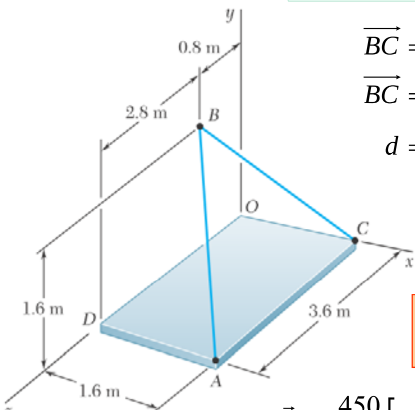
نیروی کشش در کابل BC برابر ۴۵۰ نیوتن است. مطلوبست تعیین مولفه‌های این نیرو که به نقطه C اعمال می‌شود.



$C_x = -300$ N, $C_y = 300$ N, $C_z = 150$ N.

حل

نیروی کشش در کابل BC برابر ۴۵۰ نیوتن است. مطلوبست تعیین مولفه‌های این نیرو که به نقطه C اعمال می‌شود.



$$\overrightarrow{BC} = (x_B - x_C)\vec{i} + (y_B - y_C)\vec{j} + (z_B - z_C)\vec{k}$$

$$\overrightarrow{BC} = -1.6\vec{i} + 1.6\vec{j} + 0.8\vec{k}$$

$$d = BC = \sqrt{(-1.6)^2 + (1.6)^2 + (0.8)^2} = 2.4 \text{ m}$$

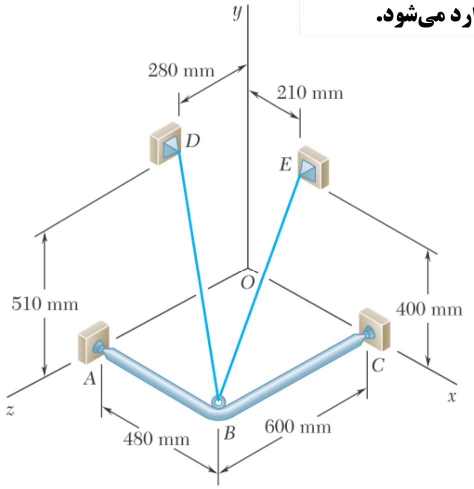
$$\boxed{\vec{F} = \frac{F}{d}\left[(x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}\right]}$$

$$\vec{F}_C = \frac{450}{2.4}\left[-1.6\vec{i} + 1.6\vec{j} + 0.8\vec{k}\right] = -300\vec{i} + 300\vec{j} + 150\vec{k}$$

$C_x = -300$ N, $C_y = 300$ N, $C_z = 150$ N.

مثال:

قاب ABC بوسیله کابل DBE که از حلقه بدون اصطکاک B می‌گذرد نگه داشته شده است. اگر کشش در این کابل برابر ۳۸۵نیوتن باشد مطلوبست مولفه های نیروی کابل که به نقطه D وارد می‌شود.

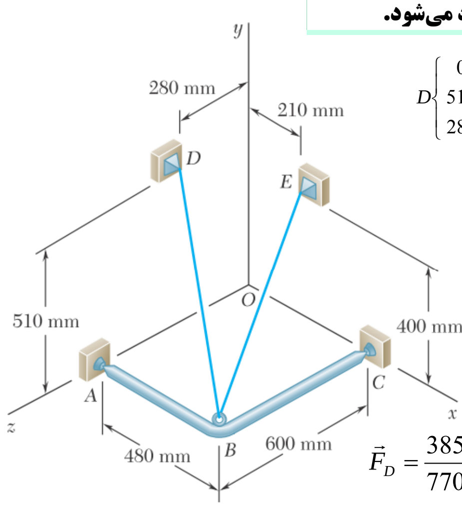


Ans: 240 N, -255 N, 160.0 N.

حل:

Ans: 240 N, -255 N, 160.0 N.

قاب ABC بوسیله کابل DBE که از حلقه بدون اصطکاک B می‌گذرد نگه داشته شده است. اگر کشش در این کابل برابر ۳۸۵نیوتن باشد مطلوبست مولفه های نیروی کابل که به نقطه D وارد می‌شود.



$$D\begin{cases}0\\510\\280\end{cases}\quad B\begin{cases}480\\0\\600\end{cases}\quad \Rightarrow \quad B-D\begin{cases}480-0=480\\0-510=-510\\600-280=320\end{cases}$$

$$d = BD = \sqrt{480^2+(-510)^2+320^2} = 770$$

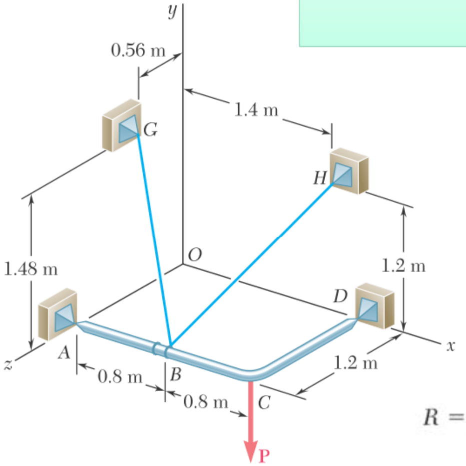
$$\boxed{\vec{F}=\frac{F}{d}\left[(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}\right]}$$

$$\vec{F}_D=\frac{385}{770}\left[480\vec{i}-510\vec{j}+320\vec{k}\right]=240\vec{i}-225\vec{j}+160\vec{k}$$

2 - 48

تکلیف منزل

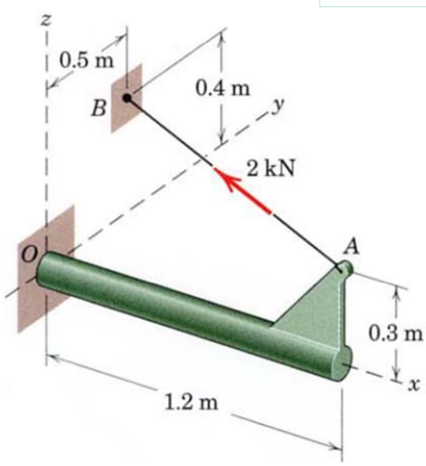
دو کابل BG و BH به قاب ACD متصل است. کابل BG تحت نیروی کشش ۵۴۰ نیوتنی و کابل BH تحت نیروی ۷۵۰ نیوتنی است.
مطلوبست تعیین مقدار و جهت نیروی برایند این دو کابل که به نقطه B وارد می‌شود.



$R = 1171$ N; $\theta_x = 89.5°$, $\theta_y = 36.2°$, $\theta_z = 126.2°$

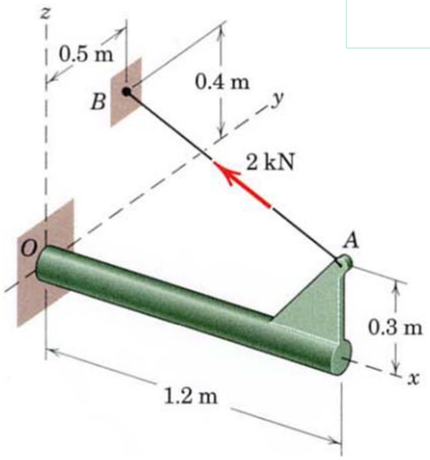
مثال:

نیروی کشش در کابل AB برابر ۲ کیلونیوتن است. مطلوبست بیان برداری این نیرو که به نقطه A وارد می‌شود.



حل:

نیروی کشش در کابل AB برابر ۲ کیلونیوتن است. مطلوبست بیان برداری این نیرو که به نقطه A وارد می‌شود.



$$A\begin{cases}1.2\\0\\0.3\end{cases}\qquad B\begin{cases}0\\0.5\\0.4\end{cases}\qquad B-A\begin{cases}0-1.2=-1.2\\0.5-0=0.5\\0.4-0.3=0.1\end{cases}$$

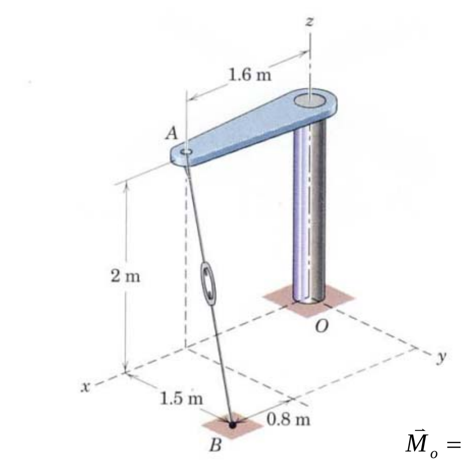
$$d = AB = \sqrt{(-1.2)^2+0.5^2+0.1^2} = 1.3$$

$$\boxed{\vec{F}=\frac{F}{d}\left[(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}\right]}$$

$$\vec{F}_{AB}=\frac{2}{1.3}\left[-1.2\vec{i}+0.5\vec{j}+0.1\vec{k}\right]=-1.84\vec{i}+0.767\vec{j}+0.153\vec{k}$$

مثال:

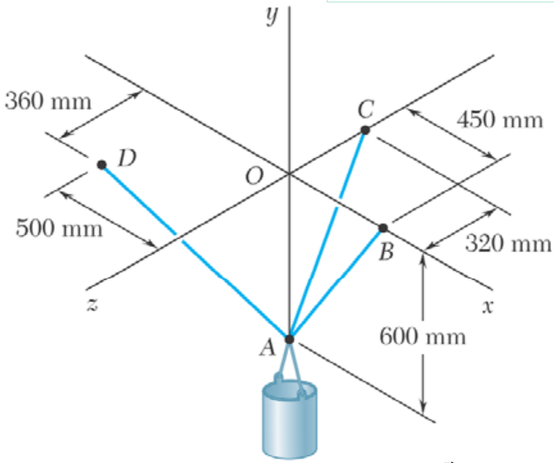
2/116 The turnbuckle is tightened until the tension in cable AB is 1.2 kN. Calculate the magnitude of the moment about point O of the force acting on point A.



$$\vec{M}_o=-2.74\vec{i}+4.39\vec{j}+2.19\vec{k}\quad \text{kN.m}$$

مثال:

نیروی کشش در کابل AD برابر ۵۱۶ نیوتن است. مطلوبست بیان برداری این نیرو که به نقطه A وارد می‌شود.



$$\vec{F}_{AD} = -300\vec{i} + 360\vec{j} + 216\vec{k} \quad \text{N}$$

Ninth Edition

CHAPTER

3

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS:

STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

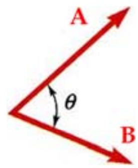
اجسام صلب
سیستم معادل نیروها

سرفصل مطالب فصل سوم:

فصل سوم: سیستم نیروهای فضایی

۱– ضرب داخلی دو بردار فضایی
۲– تعیین زاویه دو بردار فضایی
۳– تصویر یک بردار روی امتداد دلخواه
۴– ضرب خارجی دو بردار فضایی
۵– گشتاور یک نیروی فضایی حول یک نقطه
۶– گشتاور یک نیروی فضایی حول یک محور
۷– قضیه وارینیون
۸– گشتاور زوج نیرو (گشتاور کوپل)
۹– انتقال نیرو به موازات خود
۱۰– سیستم کوپل نیروی معادل

ضرب داخلی (نقطه ای) دو بردار (ادامه) :



اگر مولفه های بردارهای A و B معلوم باشد، حاصلضرب داخلی این دو بردار چگونه محاسبه می‌شود:

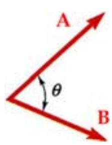
$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$
$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right) \bullet \left(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\right) = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

بنابراین حاصل ضرب داخلی، دو بردار، عبارتی عددی (اسکالر) زیر است:

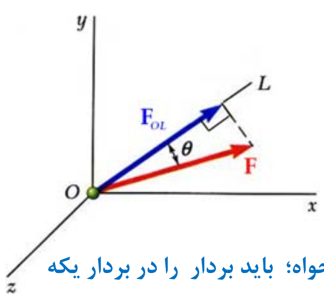
$$\boxed{\vec{A} \bullet \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}$$

کاربرد ضرب داخلی:



الف) تعیین زاویه بین دو بردار:

$$\begin{cases} \vec{A} \bullet \vec{B} = A\,B\cos\theta \\ \vec{A} \bullet \vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \end{cases} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A} \bullet \vec{B}}{A\,B} = \frac{A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z}{A\,B}$$



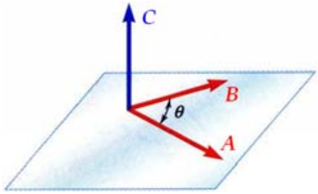
ب) تصویر (مولفه) یک بردار بر روی یک امتداد:

$$F_{OL} = F\cos\theta$$
$$\vec{F} \bullet \vec{u}_{OL} = F \times 1 \times \cos\theta = F\cos\theta$$

$$\boxed{F_{OL} = \vec{F} \bullet \vec{u}_{OL}}$$

بنابراین برای تعیین تصویر یک نیرو (بردار) بر روی یک امتداد دلخواه؛ باید بردار را در بردار یکه امتداد ضرب داخلی نماییم.

ضرب خارجی دو بردار:



حاصلضرب خارجی بردار A در بردار B ، بردار C می‌باشد. یعنی؛

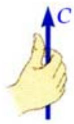
$$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{C}$$

طبق تعریف:

۱- قدرمطلق (مقدار) بردار حاصلضرب برابر است با؛

$$|C|=|A|\,|B|\,\sin\theta$$

۲- امتداد بردار C بر صفحه‌ای که توسط دو بردار A و B تشکیل می‌شود عمود است.

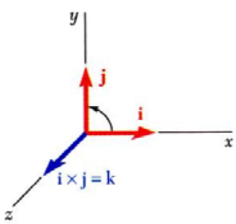


۳- جهت بردار C توسط انگشت شصت دست راست تعیین می‌شود. هرگاه انگشتان دست راست در جهت دوران بردار A که می‌خواهد بر بردار B منطبق شود قرار گیرد، انگشت شصت جهت بردار C را نشان می‌دهد.

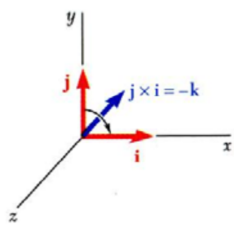
به نظر شما حاصلضرب خارجی بردارهای یکه (در همدیگر) چگونه است؟

ضرب خارجی دو بردار (ادامه):

ضرب خارجی بردارهای یکه :

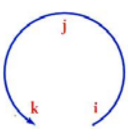


$\boxed{\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}}$



$\boxed{\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}}$

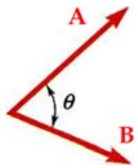
حاصل ضرب خارجی، دو بردار یکه همنام : $\vec{i}\times\vec{i}=0 \quad \vec{j}\times\vec{j}=0 \quad \vec{k}\times\vec{k}=0$



$$\begin{array}{lll} \vec{i}\times\vec{i}=0 & \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k} & \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j} \\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} & \vec{j}\times\vec{j}=0 & \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i} \\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j} & \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} & \vec{k}\times\vec{k}=0 \end{array}$$

ضرب خارجی (برداری) دو بردار (ادامه) :

اگر مولفه های بردارهای **A** و **B** معلوم باشد، حاصلضرب خارجی این دو بردار چگونه محاسبه می‌شود:



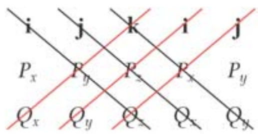
$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right)\times\left(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\right) = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\vec{i} + \left(A_zB_x - A_xB_z\right)\vec{j} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}}$$

$\vec{P}\times\vec{Q} =$



روابط پیش گفته:

مولفه های قائم بردارها :

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\mathbf{i} + (A_y + B_y)\mathbf{j} + (A_z + B_z)\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}$$

ضرب بردارها :

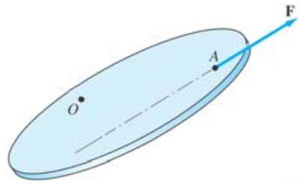
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z = AB\cos\theta$$

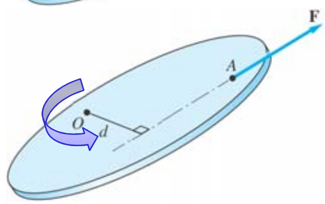
$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad |\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = AB\sin\theta$$

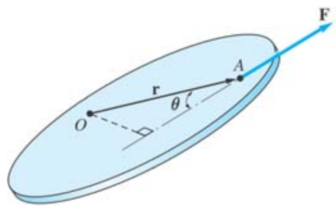
$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

θ = angle between **A** and **B**

گشتاور یک نیرو در صفحه:







گشتاور نیروی F را حول نقطه O بدست آورید .

حل:

با توجه به تعریف گشتاور (نیرو ضربدر فاصله عمودی)

داریم :
$$M_O = F\ d$$

با توجه به شکل (مثلث قائم الزاویه) داریم :

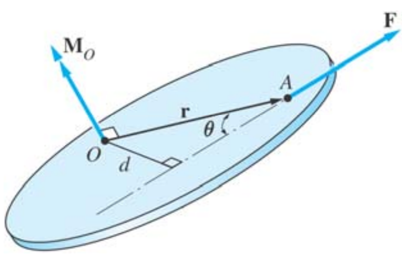
$$M_O = F\ d = F\ r \sin\theta$$

بنابراین از طریق ضرب برداری می‌توان گشتاور را اینچنین بدست آورد:

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}}$$

مقدار (اندازه) گشتاور:
$$\left|\vec{M}_O\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = r\ F \sin\theta$$

گشتاور یک نیرو در صفحه (ادامه):



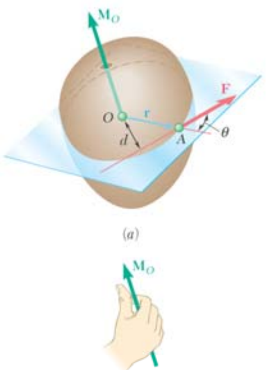
گشتاوری که از طریق ضرب برداری بدست مـی‌آیـد یک بردار خواهد بود. بنابراین می‌توان با اسـتفاده از مولفه‌های این بردار؛ مقدار ، امتداد و جهت گشـتاور (یعنی مقدار گشتاور و جهت چرخش آن) را براحتـی تعیین نمود.

$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}} \qquad \vec{M}_O = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k}$$

اگر انگشت شصت دست راسـت را در جهـت بـردار گشتاور قرار دهـیم، چهـار انگشـت دیگـر (دسـت راست) جهت چرخش را نشان خواهد داد.

گشتاور یک نیرو در فضا:

گشتاور نیروی فضای F را حول نقطه O بدست آورید .



حل:

1) بردار نیروی **F** توسط قدر مطلق آن و مختصات دو نقطه از راستای آن تعیین می‌شود.

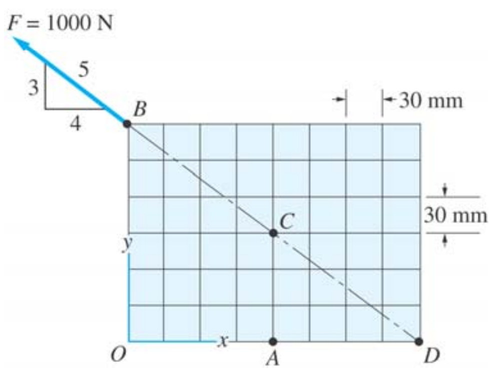
2) از نقطه **O** به یک نقطه معلوم از امتداد نیرو وصل کرده بردار مکانی **r** را تعیین می‌کنیم.

3) سپس از ضرب برداری بردار مکانی در بردار نیرو داریم:

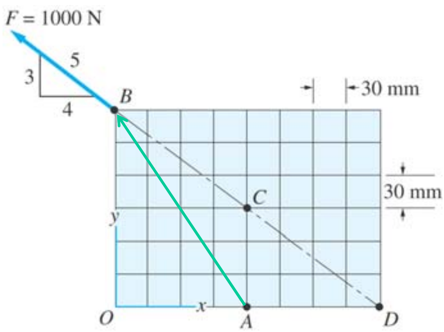
$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}}$$

مثال:

گشتاور نیروی فضای F را حول نقطه A بدست آورید .



حل:



گشتاور نیروی فضای F را حول نقطه A بدست آورید .

حل:

1) تعیین بردار نیروی F.

2) تعیین بردار مکانی r .

3) ضرب خارجی r در F.

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} = -F\cos\theta\ \vec{i} + F\sin\theta\ \vec{j}$$

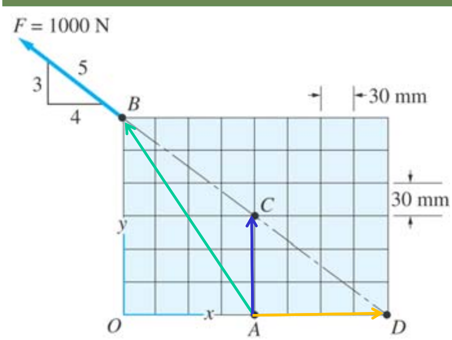
$$\vec{F} = -800\vec{i} + 600\vec{j}$$

$$\vec{r}_{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k} = -120\vec{i} + 180\vec{j}$$

$$\boxed{\vec{M}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F}}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -120 & 180 & 0 \\ -800 & 600 & 0 \end{vmatrix} = (-120\times600 + 180\times800)\vec{k} = 72000\vec{k}$$

مثال:



نکته: برای ساده شدن عمل ضرب می‌توان از هر یک از بردار مکانی ها استفاده کرد. یعنی:

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AB} \times \vec{F} = \vec{r}_{AC} \times \vec{F} = \vec{r}_{AD} \times \vec{F}$$

$$\vec{F} = -800\vec{i} + 600\vec{j}$$

$$\vec{r}_{AD} = 120\vec{i} \qquad \vec{r}_{AC} = 90\vec{j}$$

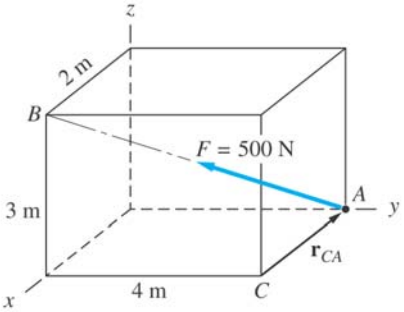
$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AD} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 120 & 0 & 0 \\ -800 & 600 & 0 \end{vmatrix} = (120\times600)\vec{k} = 72000\vec{k}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AC} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 90 & 0 \\ -800 & 600 & 0 \end{vmatrix} = -(90\times-800)\vec{k} = 72000\vec{k}$$

مثال:

الف) گشتاور نیروی فضای F را حول نقطه C بدست آورید .

ب) فاصله عمودی بین امتداد نیرو F و نقطه C چقدر است؟



حل الف :

$$\mathbf{F} = 500\boldsymbol{\lambda}_{AB} = 500\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = 500\left(\frac{2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{5.385}\right)$$

$$\mathbf{F} = 185.7\mathbf{i} - 371.4\mathbf{j} + 278.6\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_{CA} = -2\mathbf{i}$$

$$\mathbf{M}_C = \mathbf{r}_{CA} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 185.7 & -371.4 & 278.6 \end{vmatrix} \Rightarrow \mathbf{M}_C = 557.2\mathbf{j} + 742.8\mathbf{k}$$

حل ب :

$$M_C = \sqrt{(557.2)^2 + (742.8)^2} = 928.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

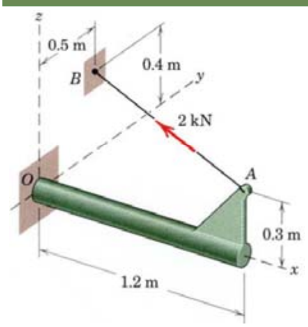
$$d = \frac{M_C}{F} = \frac{928.6}{500} = 1.857 \text{ m}$$

مثال:

نیروی کشش در کابل AB برابر 2kN می‌باشد. مطلوبست:

الف) بیان برداری این نیرو که به نقطه A وارد می‌شود.

ب) تعیین گشتاور این نیروی حول نقطه O.



$$A\begin{cases} 1.2 \\ 0 \\ 0.3 \end{cases} \quad B\begin{cases} 0 \\ 0.5 \\ 0.4 \end{cases} \quad B-A\begin{cases} 0-1.2=-1.2 \\ 0.5-0=0.5 \\ 0.4-0.3=0.1 \end{cases}$$

$$\vec{F}_{AB} = \frac{2}{1.3}\left[-1.2\vec{i} + 0.5\vec{j} + 0.1\vec{k}\right] = -1.84\vec{i} + 0.767\vec{j} + 0.153\vec{k}$$

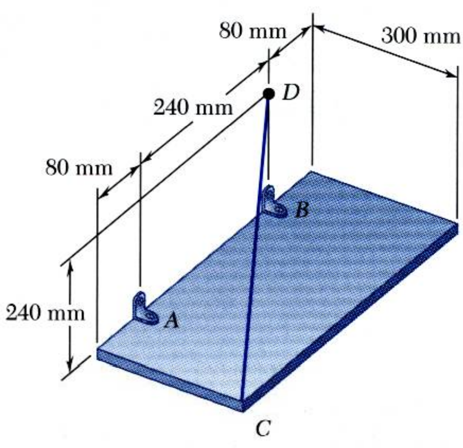
$$\vec{M}_o = \vec{r}_{OB} \times \vec{F}_{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0.5 & 0.4 \\ -1.84 & 0.767 & 0.153 \end{vmatrix}$$

$$\vec{M}_O = -0.23\vec{i} - 0.736\vec{j} + 0.92\vec{k} \quad [\text{kN.m}]$$

$$\vec{M}_O = -230\vec{i} - 736\vec{j} + 920\vec{k} \quad [\text{N.m}]$$

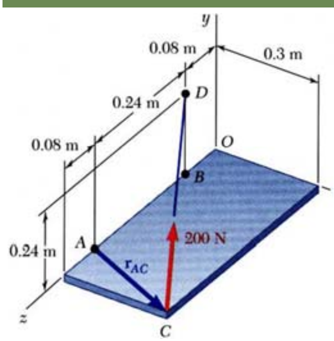
3- 18

مثال:



اگر کشش در کابل CD برابر 200N باشد.
گشتاور نیروی کابل که به نقطه C وارد
می‌شود را حول A بدست آورید .

حل:



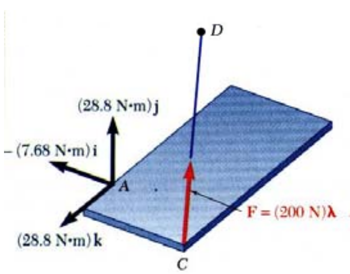
$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AC} \times \vec{F}$$

$$\vec{r}_{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = 0.3\vec{i} + 0.08\vec{k}$$

$$\vec{F} = F\vec{\lambda} = 200\frac{\vec{r}_{CD}}{r_{CD}}$$

$$= 200\frac{-0.3\vec{i} + 0.24\vec{j} - 0.32\vec{k}}{0.5}$$

$$= -120\vec{i} + 96\vec{j} - 128\vec{k}$$

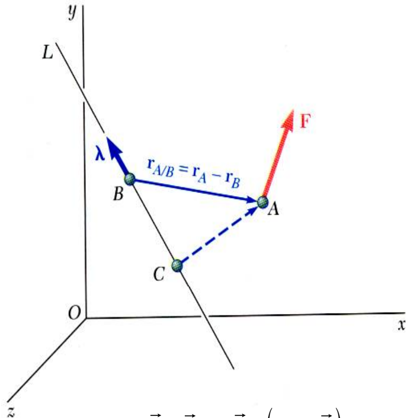


$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$\boxed{\vec{M}_A = -7.68\,\vec{i} + 28.8\vec{j} + 28.8\vec{k} \quad \mathrm{N \cdot m}}$$

گشتاور یک نیرو حول یک محور :

گشتاور نیروی F را حول محور BL تعیین کنید.



حل:

برای این منظور ابتدا گشتاور نیروی F را حول یک نقطه دلخواه از امتداد محور (نقطه B یا C) تعیین کرده و سپس آنرا در امتداد محور تصویر می‌کنیم.

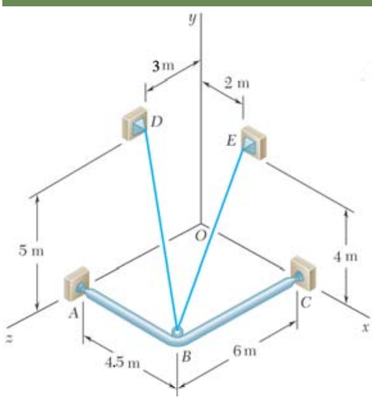
$$M_{BL} = \vec{\lambda} \bullet \vec{M}_B = \vec{\lambda} \bullet \left(\vec{r}_{BA} \times \vec{F}\right)$$

یا

$$M_{BL} = \vec{\lambda} \bullet \vec{M}_C = \vec{\lambda} \bullet \left(\vec{r}_{CA} \times \vec{F}\right)$$

مثال:

کشش در کابل BD برابر 100N می‌باشد. مطلوبست:
الف) بیان برداری این نیرو که به نقطه B وارد می‌شود.
ب) تعیین گشتاور این نیروی حول نقطه A.
ج) تعیین گشتاور این نیروی حول محور AC.



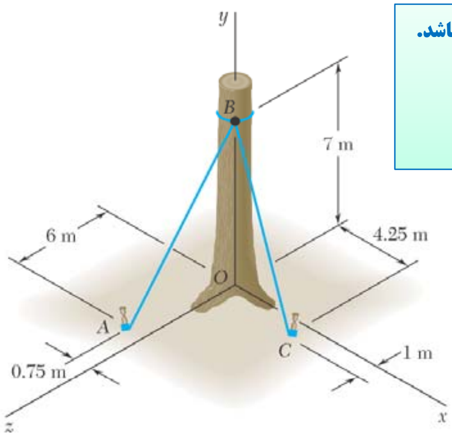
$$B\begin{cases}4.5\\0\\6\end{cases}\quad D\begin{cases}0\\5\\3\end{cases}\quad D-B\begin{cases}0-4.5=-4.5\\5-0=5\\3-6=-3\end{cases}$$

$$\vec{F}_{BD} = \frac{100}{7.365}\left(-4.5\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}\right) = -61\,\vec{i}+67.8\,\vec{j}-40.73\,\vec{k}$$

$$\vec{M}_A = \vec{r}_{AB}\times\vec{F}_{BD} = \begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4.5 & 0 & 0\\ -61 & 67.8 & -40.73\end{vmatrix} \Rightarrow \vec{M}_A = -183.28\,\vec{j}+305.46\,\vec{k}\quad [\text{N.m}]$$

$$M_{AC} = \vec{M}_A\bullet\vec{u}_{AC} = (-183.28\,\vec{j}+305.46\,\vec{k})\bullet\left(\frac{4.5\vec{i}-6\vec{k}}{\sqrt{4.5^2+6^2}}\right)\qquad M_{AC} = \vec{M}_A\bullet\vec{u}_{AC} = \frac{-305.46\times 6}{7.5} = -244.37\ \text{N.m}$$

تکلیف منزل:



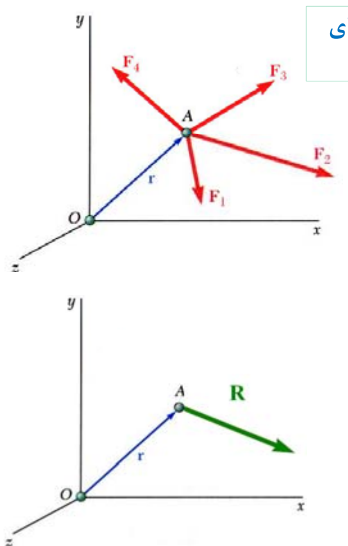
کشش در کابل AB برابر 555N و در کابل BC برابر 660N می‌باشد.
مطلوبست:
الف) بیان برداری این نیروها که به نقطه B وارد می‌شوند.
ب) تعیین گشتاور برایند این نیروها حول نقطه O.

$$\vec{F}_{AB} = -45\,\vec{i} - 420\,\vec{j} + 360\,\vec{k}$$

$$\vec{F}_{BC} = 340\,\vec{i} - 560\,\vec{j} + 80\,\vec{k}$$

$$\vec{M}_O = 3080\,\vec{i} - 2065\,\vec{k}$$

قضیه وارینون:



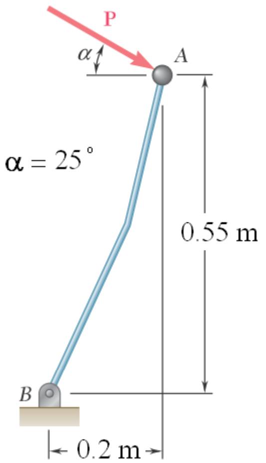
گشتاور یک نیرو حول یک نقطه برابر است با گشتاور مولفه های آن نیرو حول همان نقطه.

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots$$

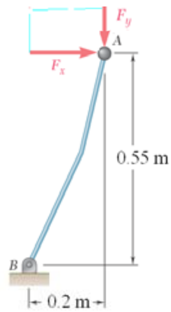
$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{R} = \vec{r} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots\right) = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \cdots$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \cdots$$

مثال:



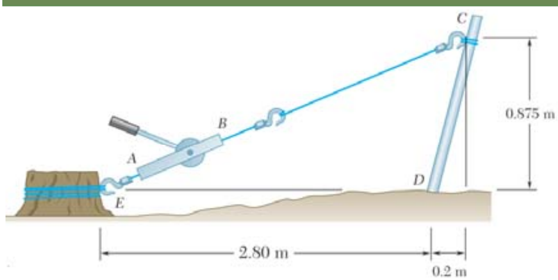
نیروی P=8N به نقطه A وارد می‌شود. گشتاور این نیرو را حول نقطه B بدست آورید.



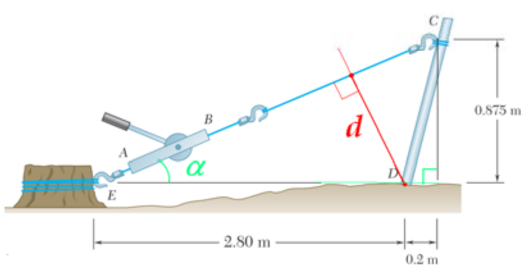
$$M_B = -F_x \times 0.55 - F_y \times 0.2$$

$$M_B = -8\cos 25^\circ \times 0.55 - 8\sin 25^\circ \times 0.2 = -4.664 \quad \text{N.m}$$

مثال:



برای چرخش میله CD، به گشتاور 960N.m حول نقطه D نیاز اســت. نیروی کشش در AB چقدر بایــد باشد.



$$\tan\alpha = \frac{0.875}{2.8+0.2} = 0.2916$$

$$\alpha = 16.27^\circ$$

$$d = 2.8\sin\alpha = 0.784$$

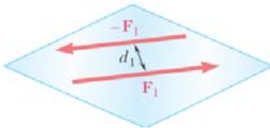
$$M = F_{AB}d \quad \Rightarrow \quad 960 = F_{AB} \times 0.784$$

$$F_{AB} = 1224.5 \ \text{N}$$

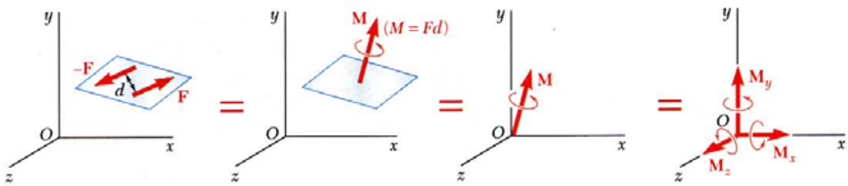
گشتاور زوج نیرو :

تعریف زوج نیرو (کوپل):

دو نیرو با امتداد مساوی و قدر مطلق مساوی و مختلف الجهت را زوج نیرو می‌نامند.

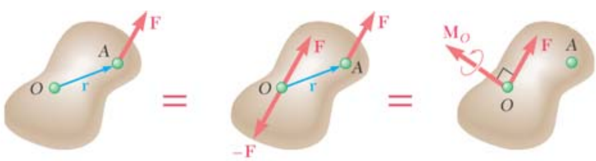


$$\boxed{M_{\text{Couple}} = F \times d}$$

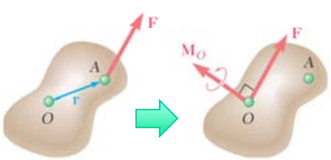


انتقال نیرو به موازات خود (سیستم کوپل نیروی معادل)

نیروی F را که به نقطه A اثر کرده است (به موازات خود) به نقطه O انتقال دهید.



(a) (b) (c)



$$\boxed{\vec{M}_O = \vec{r}_{OA} \times \vec{F}}$$

نتیجه:

با انتقال نیروی F به نقطه O ، گشتاور آن هم به نقطه O انتقال می‌یابد.

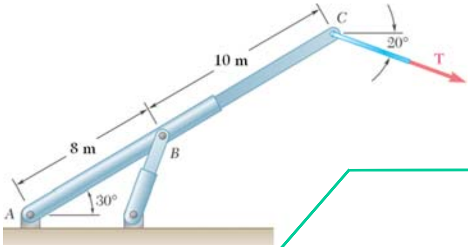
به نتیجه حاصله، سیستم کوپل نیروی در نقطه O نیز می‌گویند.

مثال:

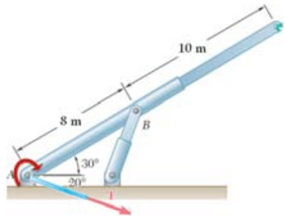
کشش در کابل T=560N است. مطلوبست:

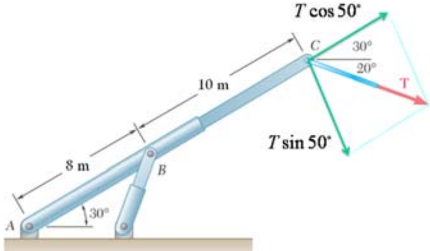
الف) سیستم کوپل نیروی معادل در نقطه A.

ب) سیستم کوپل نیروی معادل در نقطه B.



حل:



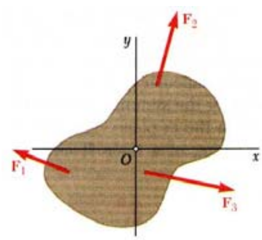


$$M_A = T\sin 50^{\circ} \times 18 = 7721.7 \ \text{ N.m}$$

تبدیل سیستم نیروها به یک نیروی معادل:

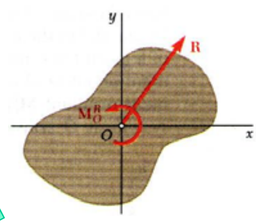
۱- ابتدا سیستم نیروهای غیر متقارب را به یک سیستم کوپل نیروی معادل (R و M) تبدیل می‌کنیم.

برای این منظور هریک از نیروها را به نقطه o منتقل می‌کنیم. با انتقال هر نیرو گشتاور آن نیز منتقل می‌شود. مجموع این گشتاورها M را می‌سازد. از برایند نیروها R بدست می‌آید.

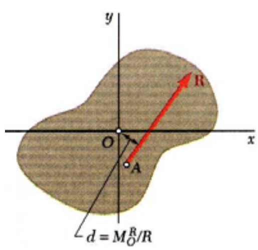


(1)

$$\vec{R} = \sum \vec{F}$$
$$\vec{M}_O^R = \sum \left(\vec{r} \times \vec{F}\right)$$



(2)



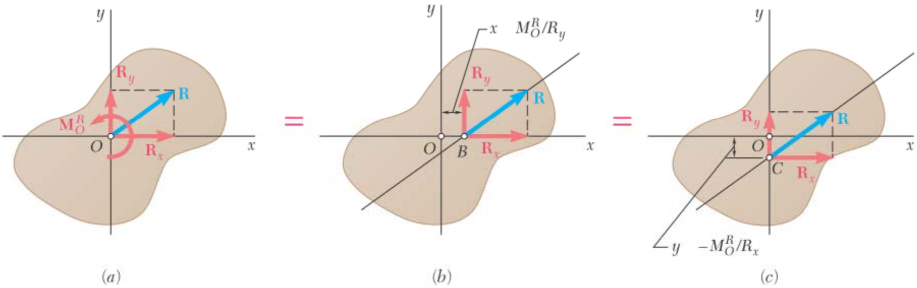
۲- با جابجایی نیروی R ، سیستم تک نیروی معادل بدست می‌آید.

تبدیل سیستم نیروها به یک نیروی معادل:

۲- مقدار جابجایی نیروی R در جهت افق و یا در جهت قائم بصورت زیر بدست می‌آید.

$$R_x = \Sigma F_x$$
$$R_y = \Sigma F_y$$
$$M_O^R = \Sigma M_O$$

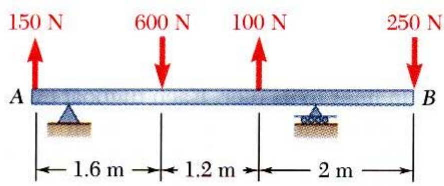
$$\Delta x = \frac{M_O^R}{R_y} \qquad \Delta y = \frac{M_O^R}{R_x}$$



مثال:

الف) سیستم کوپل نیروی معادل در A را بدست آورید.

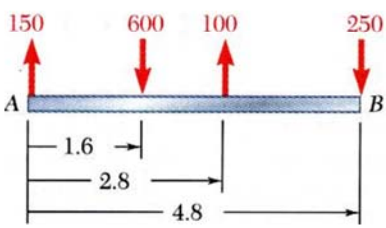
ب) سیستم کوپل نیروی معادل در B را بدست آورید.



حل:

ابتدا برایند نیروها را تعیین می‌کنیم (**R**).

سپس کوپل برایند را حول A بدست می‌آوریم (**M**).



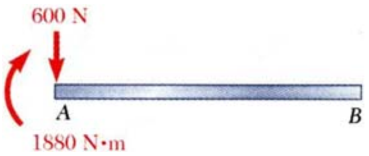
$$R = \sum F_y = 150 - 600 + 100 - 250 = -600N$$

$$M_A^R = \sum F \times d = -1.6 \times 600 + 2.8 \times 100 - 4.8 \times 250$$

$$M_A^R = \sum F \times d = -1880 \quad N.m$$

ادامه حل:

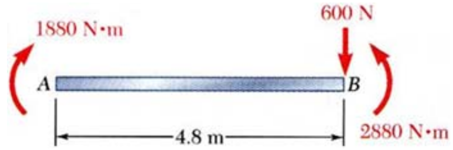
حل الف):



$R=-600N$

$M_A^R=-1880\ \ N.m$

حل ب):



$$\vec{M}_B^R=\vec{M}_A^R+\vec{r}\times\vec{R}$$
$$=-1880+4.8\times 600$$
$$=-1880+2880=1000\text{N}\cdot\text{m}$$

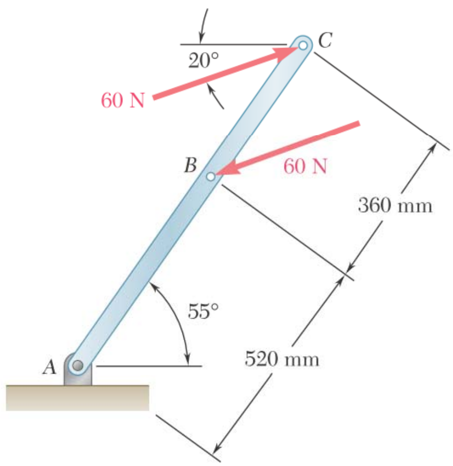
تکلیف منزل:

دو نیروی موازی مطابق شکل به اهرم وارد می‌شود. مطلوبست تعیین گشتاور این زوج نیرو (کوپل):

الف) با تجزیه هریک از نیروها به مولفه‌های قائم و افقی و سپس جمع گشتاور دو کوپل حاصل.

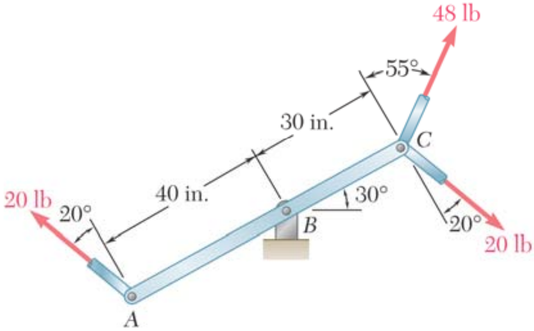
ب) با استفاده از فاصله عمودی بین دو نیرو.

ج) با جمع گشتاور هر یک از دو نیرو، حول نقطه A .



(a) 12.39 N · m ↻. (b) 12.39 N · m ↻. (c) 12.39 N · m ↻.

مثال:



سه نیروی مطابق شکل به میلــه ABC وارد می‌شود. مطلوبست :

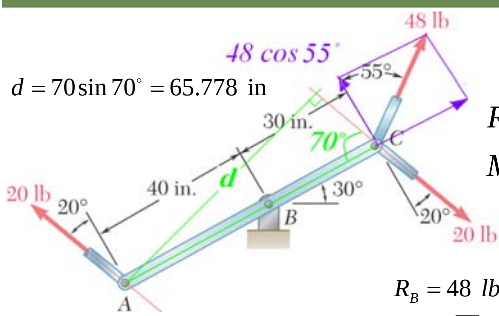
الف) سیستم کوپــل نیــروی معــادل در نقطه B.

ب) تک نیروی معادل با سیســتم کوپــل نیروی بدست آمده در قسمت الــف را تعیین کرده و نقطه اثر آن را بدســت آورید.

حل:

حل الف):

$d = 70\sin 70^\circ = 65.778 \text{ in}$

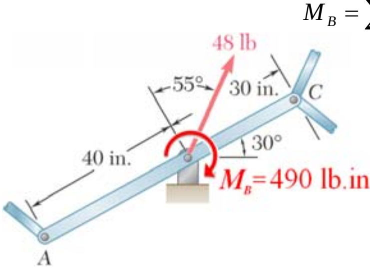


$R_B =$ **برایند نیروها انتقال یافته به نقطه B**

$M_B =$ **مجموع گشتاورهای انتقال یافتــه بــه نقطه B**

$$R_B = 48 \;\; lb$$

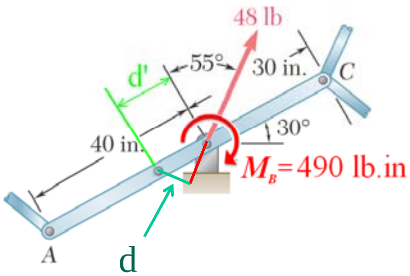
$$M_B = \sum M = -20 \times d + 48\cos 55^\circ \times 30 = -490 \;\; \text{lb.in}$$



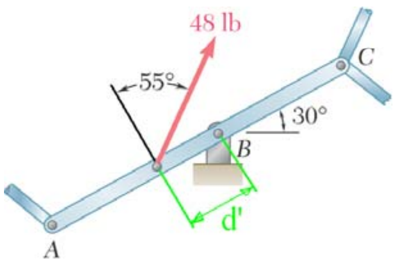
جواب الف)

حل (ادامه):

حل ب):



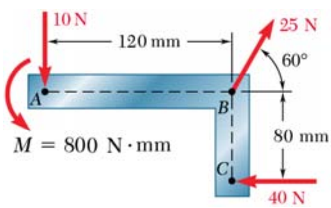
$$d=\frac{M}{R}=\frac{490}{48}=10.2\ \ in$$
$$d=d'\sin 35$$
$$d'=17.8\ \ \text{in}$$



یا:

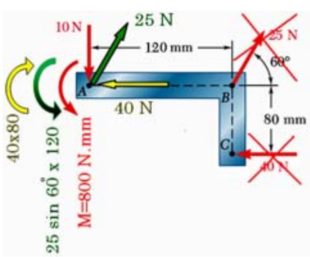
$$48\cos 55^{\circ}\times d'=490$$
$$d'=17.8\ \ \text{in}$$

مثال:



سه نیرو و یک گشتاور مطابق شکل به جسم اعمال شده است.
مطلوبست:
الف) سیستم کوپل نیروی معادل در نقطه A.
ب) سیستم تک نیروی معادل را در نقطه‌ای روی امتداد AB تعیین کنید.

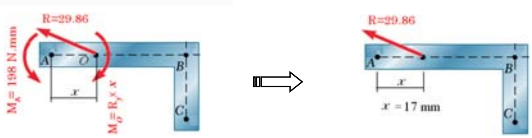
حل الف): ابتدا تمام نیروها را به نقطه A انتقال می‌دهیم. سپس برایند نیروها و گشتاورها را (در نقطه A) تعیین می‌کنیم.



$$R_x=\sum F_x=-40+25\cos 60^{\circ}=-27.5\,\text{N} \qquad R=\sqrt{R_x+R_y}=\sqrt{27.5^2+11.65^2}=29.86\,\text{N}$$

$$R_y=\sum F_y=-10+25\sin 60^{\circ}=11.65\,\text{N} \qquad \alpha=\tan^{-1}\left(\frac{11.65}{27.5}\right)=23^{\circ}$$

$$M_A=\sum M=800+25\sin 60^{\circ}\times 120-40\times 80=198\,\text{N.mm}$$



$$M_A=M_O \quad\Rightarrow\quad x=\frac{198}{11.65}=17\ \ \text{mm}$$

Ninth Edition

CHAPTER

4

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS:

STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

تعادل اجسام صلب

سرفصل مطالب و مسائل فصل چهارم:

فصل چهارم: تعادل اجسام صلب

۱– نمودار آزاد اجسام

۲– معادلات تعادل در مسائل دوبعدی و سه بعدی

۳– انواع تکیه گاه

۴– تعیین عکس العمل تکیه گاهی

۵– تعادل اجسام دو نیرویی و سه نیرویی

۶– تعیین نیرو و گشتاور در قاب های ساده

تعادل اجسام صلب:

۱– معادلات تعادل اجسام صلب (در فضا):

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \\ \sum F_z = 0 \end{cases}$$ تعادل حرکتی

$$\sum \vec{M}_o = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \sum M_x = 0 \\ \sum M_y = 0 \\ \sum M_z = 0 \end{cases}$$ تعادل چرخشی

۲– معادلات تعادل اجسام صلب (در صفحه):

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases}$$ تعادل حرکتی

$$\sum \vec{M}_o = 0 \quad \Rightarrow \sum M_z = 0$$ تعادل چرخشی

تعادل اجسام صلب:

۳– حل مسائل استاتیک با روش تعادل :

برای حل مسائل استاتیک به روش تعادل، ابتدا نمودار آزاد جسم صلب ترسیم می‌شود. نمودار آزاد نموداری است که همه **نیروها** و **گشتاورهای** اعمالی به جسم (اعم از نیروها و گشتاورهای **خارجی** و **تکیه‌گاهی**) را نشان دهد. برای نشان دادن نیرو و گشتاور تکیه گاهی باید انواع تکیه‌گاه‌ها را بشناسیم.

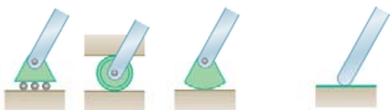
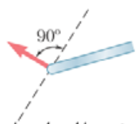
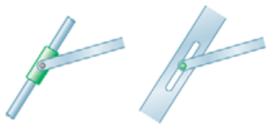
برای حل مسائل استاتیک به روش تعادل، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱– ترسیم نمودار آزاد جسم

۲– نوشتن معادلات تعادل

۳– حل معادلات تعادل

انواع تکیه‌گاه:

تعداد مجهولات	عکس العمل	نوع تکیه‌گاه یا اتصال
1	 نیرو با امتداد معلوم	 غلطکی — تماسی بدون اصطکاک
1	 نیرو با امتداد معلوم	 کابل کوتاه — میله کوتاه
1	 نیرو با امتداد معلوم	 تکیه‌گاه کشوئی بدون اصطکاک

انواع تکیه‌گاهها:

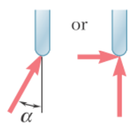
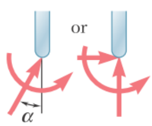
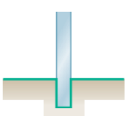
۱- تکیه‌گاه غلطکی، میله‌ای و لغزان (یک مجهولی)

۲- تکیه‌گاه مفصلی یا پینی (دو مجهولی)

۳- تکیه‌گاه گیردار (سه مجهولی)

2 - 5

انواع تکیه‌گاه:

تعداد مجهولات	عکس العمل	نوع تکیه‌گاه یا اتصال
2	 نیرو و امتدادآن مجهول	 تکیه‌گاه پینی — تماسی با اصطکاک
3	 نیرو و گشتاور مجهول	 تکیه‌گاه گیردار

انواع تکیه‌گاهها:

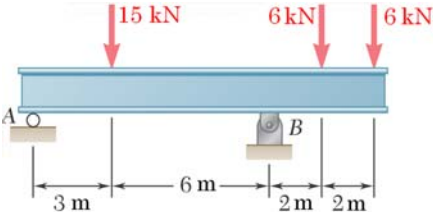
۱- تکیه‌گاه غلطکی، میله‌ای و لغزان (یک مجهولی)

۲- تکیه‌گاه مفصلی یا پینی (دو مجهولی)

۳- تکیه‌گاه گیردار (سه مجهولی)

مثال:

در تیر تحت بار مقابل مطلوبست: تعیین عکس العمل تکیه‌گاهی در A و B.

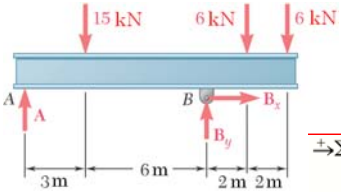


حل:

۱- ترسیم نمودار آزاد جسم

۲- نوشتن معادلات تعادل

۳- حل معادلات تعادل



$$\xrightarrow{+}\Sigma F_x = 0: \qquad B_x = 0 \qquad \boxed{\mathbf{B}_x = 0}$$

$$+\circlearrowleft\Sigma M_A = 0: \qquad -(15)(3) + B_y(9) - (6)(11) - (6)(13) = 0$$

$$B_y = +21 \qquad \boxed{\mathbf{B}_y = 21 \text{ kN} \uparrow}$$

$$+\circlearrowleft\Sigma M_B = 0: \qquad -A(9) + (15)(6) - (6)(2) - (6)(4) = 0$$

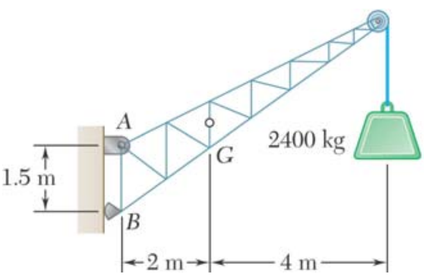
$$A = +6 \qquad \boxed{\mathbf{A} = 6 \text{ kN} \uparrow}$$

مثال:

سازه مقابل دارای جرم ۱۰۰۰ کیلوگرم است و مرکز جرم آن در نقطه G قرار دارد. با اعمال بار ۲۴۰۰ کیلوگرم به آن مطلوبست:

الف) عکس العمل تکیه‌گاهی در B.

ب) عکس العمل تکیه‌گاهی در A.



حل:

۱- ترسیم نمودار آزاد جسم

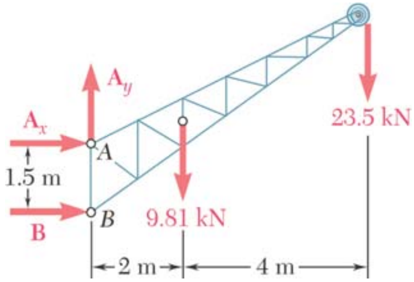
۲- نوشتن معادلات تعادل

۳- حل معادلات تعادل

$$W = 1000 \times 9.81 = 9810 \text{ N} = 9.81 \text{ kN}$$

$$F = 2400 \times 9.81 = 23500 \text{ N} = 23.5 \text{ kN}$$

حل:



$$\sum M_A = 0: \quad +B(1.5) - 9.81(2) - 23.5(6) = 0$$

$$\boxed{B = +107.1\,\text{kN}}$$

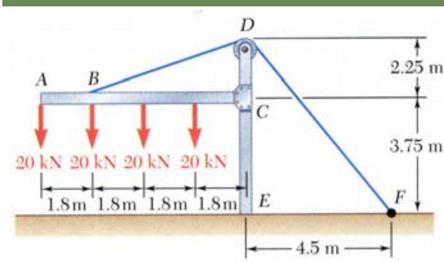
$$\sum F_x = 0: \quad A_x + B = 0$$

$$\boxed{A_x = -107.1\,\text{kN}}$$

$$\sum F_y = 0: \quad A_y - 9.81 - 23.5 = 0$$

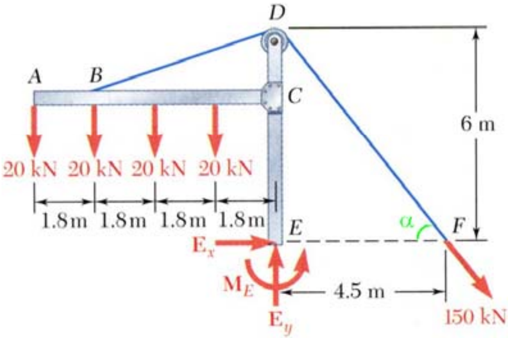
$$\boxed{A_y = +33.3\,\text{kN}}$$

مثال:



قاب مقابل نیروهای سقف یک ساختمان کوچک را تحمل می‌کند. کشش در کابل برابر 150 kN است. عکس العمل در انتهای ثابت E را تعیین کنید.

حل مثال :



$$\sum F_x = 0: \quad E_x + 150\cos\alpha = 0$$

$$E_x + \frac{4.5}{7.5}\times 150 = 0$$

$$\boxed{E_x = -90.0\ \text{kN}}$$

$$\sum F_y = 0: \quad E_y - 4(20) - \frac{6}{7.5}(150) = 0$$

$$\boxed{E_y = +200\ \text{kN}}$$

$$\sum M_E = 0:$$

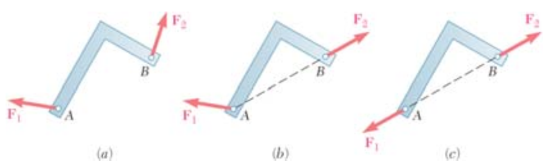
$$+20(7.2) + 20(5.4) + 20(3.6) + 20(1.8) - \frac{6}{7.5}(150)4.5 + M_E = 0$$

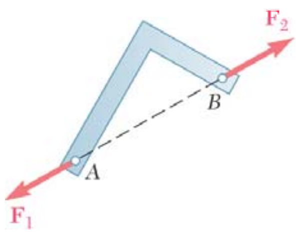
$$\boxed{M_E = 180.0\ \text{kN}\cdot\text{m}}$$

تعادل جسم دو نیرویی:

اگر عضوی تحت اثر (فقط) دو نیرو قرار گرفته و در حال تعادل باشد، عضو دو نیرویی است.

گشتاورگیری حول نقاط اثر نیرو، نتیجه می‌دهد که امتداد نیروها؛ خط واصل دو نقطه اثر است. همچنین با نوشتن معادله نیروها مشخص می‌شود که این دو نیرو با هم مساوی و مختلف الجهت‌اند.

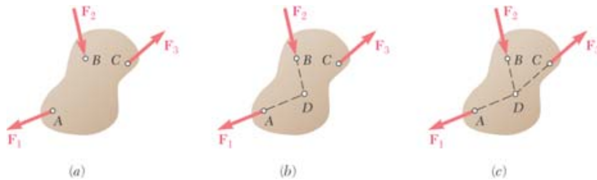


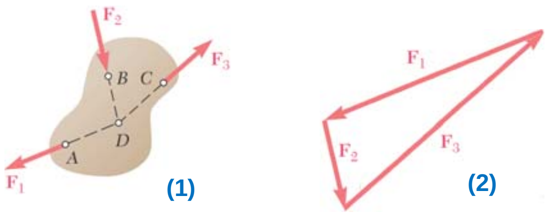


$$F_1 = F_2$$

تعادل جسم سه نیرویی:

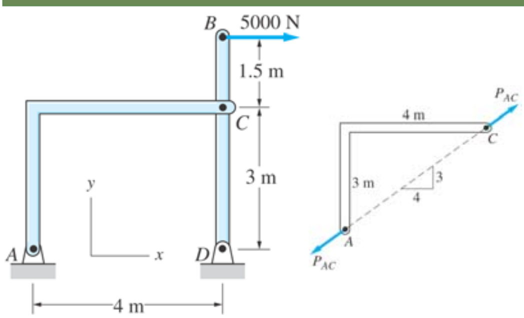
اگر عضوی تحت اثر (فقط) سه نیرو قرار گرفته و در حال تعادل باشد، عضو سه نیرویی است.
تعادل چرخشی و حرکتی نتیجه می‌دهد که در عضو سه نیرویی :
۱- امتداد سه نیرو از یک نقطه واحد (مشترک) می‌گذرد.
۲- چند ضلعی نیرو یک مثلث است.

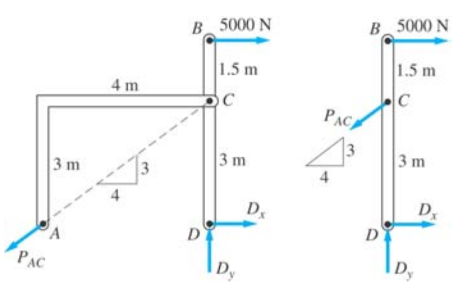


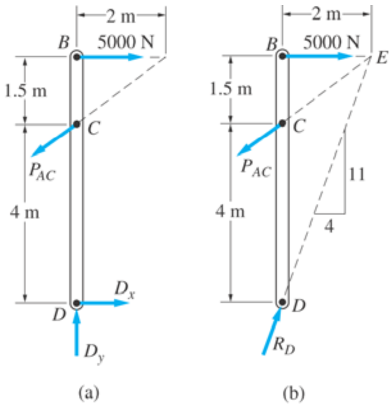


مثال:

در بارگذاری نشان داده شده، مطلوبست :
عکس العمل تکیه گاهی در A و D .

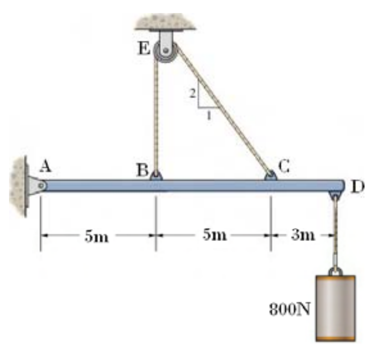




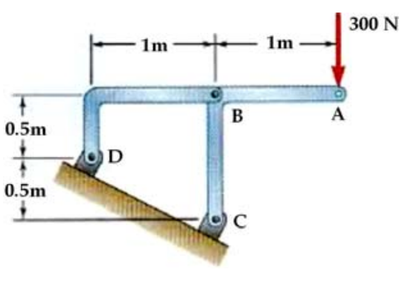


مثال:

در بارگذاری نشان داده شده، مطلوبست تعیین نیروی کشش در کابل BEC و عکس العمل تکیه گاهی در A (قرقره E بدون اصطکاک است).



در بارگذاری نشان داده شده، مطلوبست تعیین عکس العمل تکیه گاهی در C و D .

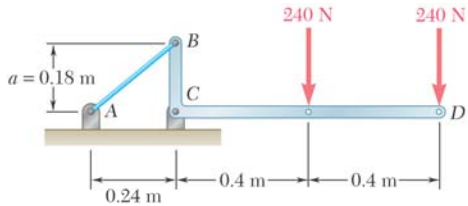


تکلیف منزل:

مطلوبست:

الف) کشش در کابل AB.

ب) عکس العمل تکیه گاهی در C .



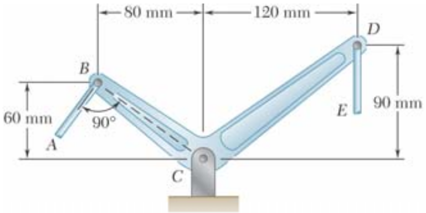
(a) 2.00 kN. (b) 2.32 kN ∠ 46.4°.

کشش در میله AB برابر 720N است.

مطلوبست:

الف) تعیین نیروی میله DE.

ب) عکس العمل تکیه گاهی در C .



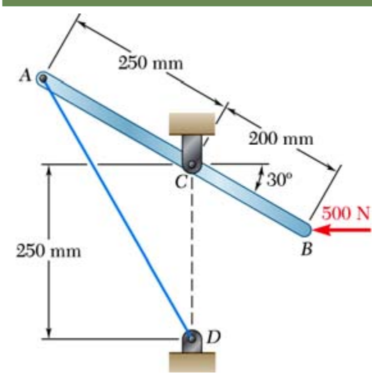
(a) F_{DE} = 600 N. (b) **C** = 1253 N ∠ 69.8°.

مثال:

برای میله تحت بار مقابل مطلوبست:

الف) کشش در کابل AD.

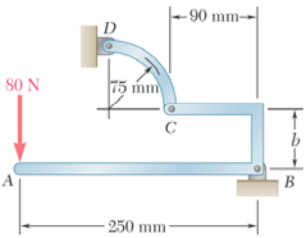
ب) عکس العمل تکیه گاهی در C .



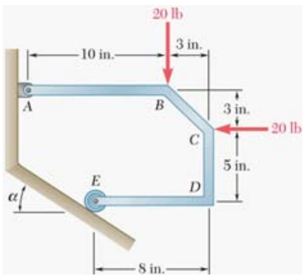
(a) 400 N. (b) **C** = 458 N ∠ 49.1°.

مثال:

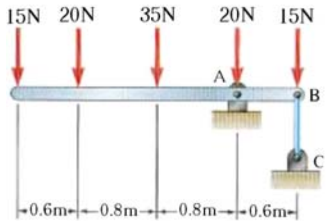
Determine the reactions at B and D when $b = 60$ mm.



For the frame and loading shown, determine the reactions at A and E when (a) $\alpha = 30°$, (b) $\alpha = 45°$.

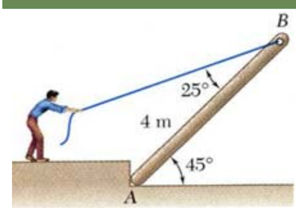


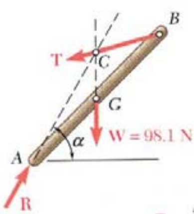
برای تیر بارگذاری شده مقابل مطلوبست:
الف) کشش در کابل BC.
ب) عکس العمل تکیه گاهی در A .

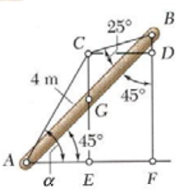


مثال:

شخصی یک ستون ۱۰ کیلوگرمی به طول ۴ متر را مطابق شکل نگه داشته است. مطلوبست:
الف) کشش در کابل.
ب) عکس العمل تکیه گاهی در A .







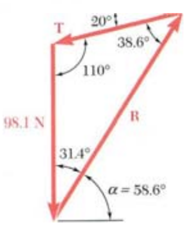
$$AF = AB\cos 45 = (4\,\text{m})\cos 45 = 2.828\,\text{m}$$

$$CD = AE = \tfrac{1}{2}AF = 1.414\,\text{m}$$

$$BD = CD\cot(45+20) = (1.414\,\text{m})\tan 20 = 0.515\,\text{m}$$

$$CE = BF - BD = (2.828 - 0.515)\,\text{m} = 2.313\,\text{m}$$

$$\tan\alpha = \frac{CE}{AE} = \frac{2.313}{1.414} = 1.636 \qquad \boxed{\alpha = 58.6°}$$



$$\frac{T}{\sin 31.4°} = \frac{R}{\sin 110°} = \frac{98.1\,\text{N}}{\sin 38.6°} \qquad \boxed{T = 81.9\,\text{N}} \quad \boxed{R = 147.8\,\text{N}}$$

Ninth Edition

CHAPTER

5

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS:

STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

نیروهای گسترده:
مرکز جرم و گرانیگاه

سرفصل مطالب و مسائل فصل پنجم:

فصل پنجم: مرکز هندسی، گشتاور اول سطح و نیروهای گسترده

۱– مرکز جرم (مرکز ثقل)

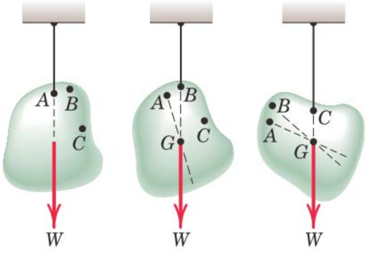
۲– مرکز هندسی سطوح

۳– گشتاور اول سطح

۴– نیروهای گسترده روی تیرها (تبدیل نیروی گسترده به متمرکز)

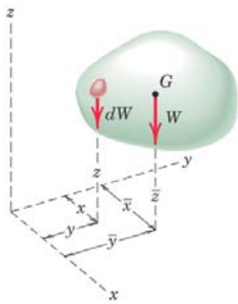
مرکز ثقل یک جسم:

مرکز ثقل یک جسم و موقعیت آن.



(a) (b) (c)

نیروی وزن اجسام به یک نقطه به نام مرکز ثقل جسم (نقطه G) اثر می‌کنند :



مطابق قضیه وارینیون، گشتاور یک نیرو با گشتاور مولفه های آن نیرو برابر است. یعنی:

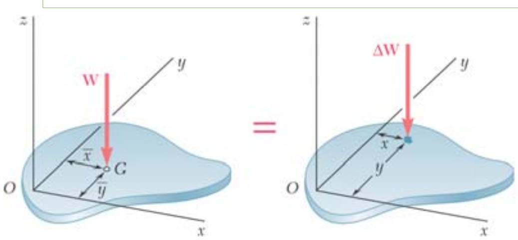
$$\bar{x}W = \int x\, dW$$

نهایتا موقعیت مرکز جرم اجسام بصورت زیر قابل تعیین است:

$$\bar{x} = \frac{\int x\, dW}{W} \qquad \bar{y} = \frac{\int y\, dW}{W} \qquad \bar{z} = \frac{\int z\, dW}{W}$$

مرکز ثقل یک صفحه:

موقعیت مرکز ثقل و مرکز سطح صفحه نشان داده شده (دارای مساحت A و ضخامت t) را بدست آورید.



حل:

ابتدا تعیین $\bar{y}$:

اگر وزن کل W را به چندین جز ΔW تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\sum M_x : \;\Rightarrow\; \bar{y}\; W = \sum y\; \Delta W \;\Rightarrow\; \bar{y} = \frac{\sum y\; \Delta W}{W} \;\Rightarrow\; \bar{y} = \frac{\int y\; dW}{W}$$

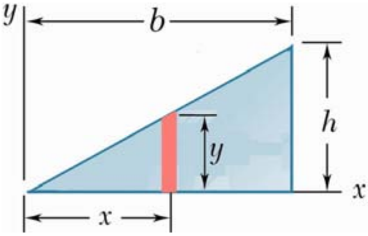
$$W = \rho g V = \rho g t A \;\Rightarrow\; \bar{y} = \frac{\sum y\; \Delta A}{A} \;\Rightarrow\; \bar{y} = \frac{\int y\; dA}{A}$$

نهایتا برای مرکز سطح، نتیجه می‌شود :

$$\boxed{\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \quad \text{and} \quad \bar{x} = \frac{\int x dA}{A}}$$

مثال:

موقعیت مرکز سطح مثلث نشان داده شده را بدست آورید.

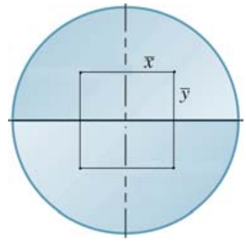


$$\frac{y}{x}=\frac{h}{b} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{h}{b}x$$

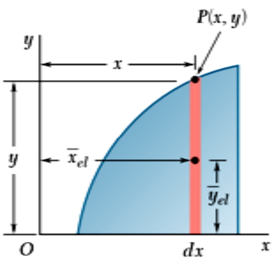
$$dA = ydx = \frac{h}{b}xdx$$

$$\bar{x}A=\int xdA=\int \frac{h}{b}x^2dx=\frac{h}{b}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b=\frac{hb^2}{3}$$

$$A=\frac{bh}{2} \quad\Rightarrow\quad \bar{x}=\frac{2}{3}b$$



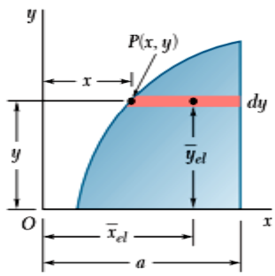
تعیین مرکز سطح با انتگرالگیری:



$\bar{x}_{el}=x$

$\bar{y}_{el}=y/2$

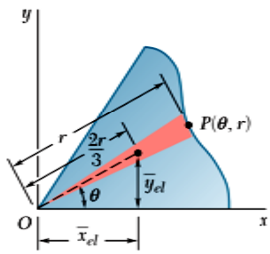
$dA=ydx$



$\bar{x}_{el}=\dfrac{a+x}{2}$

$\bar{y}_{el}=y$

$dA=(a-x)dy$



$\bar{x}_{el}=\dfrac{2r}{3}\cos\theta$

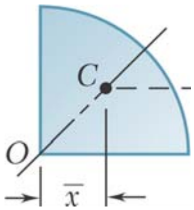
$\bar{y}_{el}=\dfrac{2r}{3}\sin\theta$

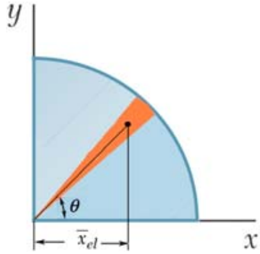
$dA=\dfrac{1}{2}r^2\,d\theta$

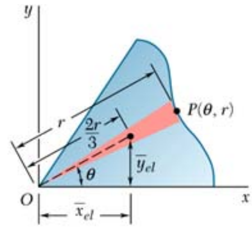
$$Q_y=\bar{x}A=\int \bar{x}_{el}\,dA$$

$$Q_x=\bar{y}A=\int \bar{y}_{el}\,dA$$

مثال (تعیین مرکز هندسی ربع دایره با انتگرالگیری):







$$\bar{x}_{el} = \frac{2r}{3}\cos\theta$$

$$\bar{y}_{el} = \frac{2r}{3}\sin\theta$$

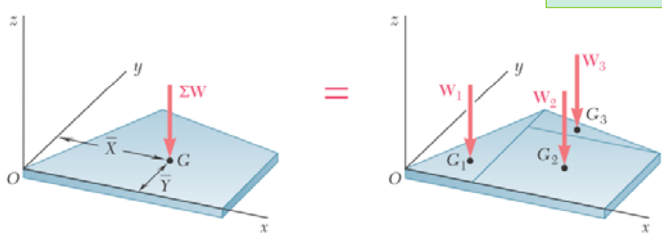
$$dA = \frac{1}{2}r^2\,d\theta$$

$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el}dA = \int \frac{2r}{3}\cos\theta \times \frac{1}{2}r^2 d\theta = \frac{r^3}{3}\int \cos\theta\, d\theta = \frac{r^3}{3}\left[\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^3}{3}$$

$$\bar{x}\frac{\pi r^2}{4} = \frac{r^3}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$$

مرکز ثقل یک صفحه:

موقعیت مرکز سطح برای سطوح مرکب.



$$W = \rho g V = \rho g t A = kA$$

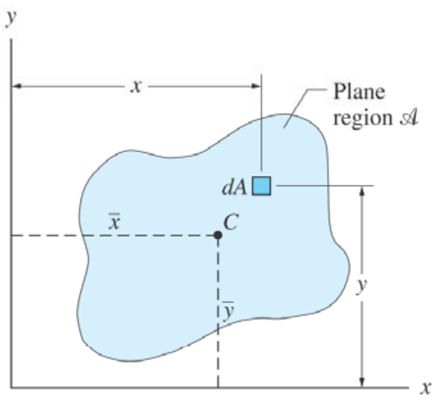
اگر مساحت کل A به n سطح معلوم (شناخته شده) قابل تقسیم باشد، خواهیم داشت:

$$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i A_i}{A}}$$

$$\boxed{\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i A_i}{A}}$$

گشتاور اول سطح:

گشتاور اول سطح نسبت به محور x و y بصورت زیر تعریف می‌شود:



$$Q_x = \bar{y}A = \sum_{i=1}^{n} y_i A_i = \int y dA$$

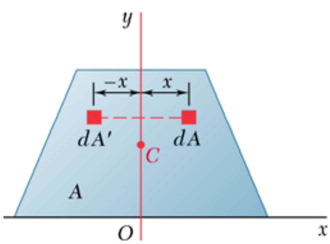
$$Q_y = \bar{x}A = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i = \int x dA$$

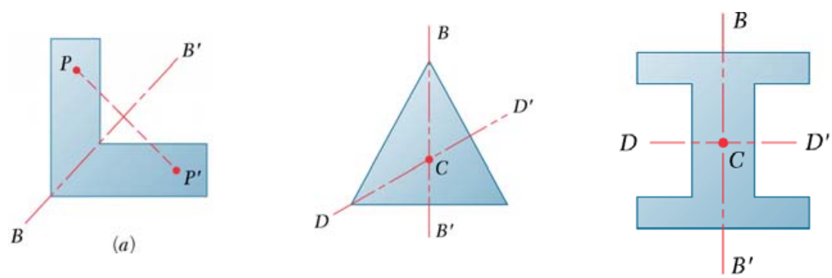
بنابراین برای مرکز سطح، می‌توان روابط زیرا نیز نوشت:

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i A_i}{A} = \frac{Q_x}{A} \quad \text{and} \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i A_i}{A} = \frac{Q_y}{A}$$

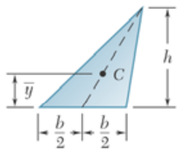
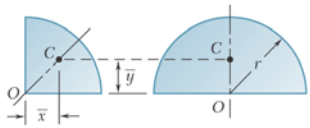
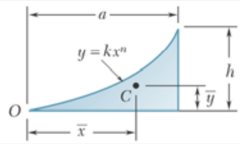
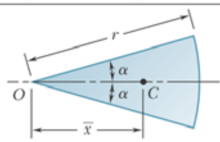
گشتاور اول سطح:

گشتاور اول سطح، (برای سطوحی که دارای محور تقارن هستند) نسبت به محورهای تقارن صفر است. برای مثال:

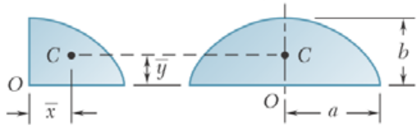
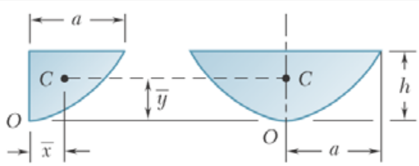




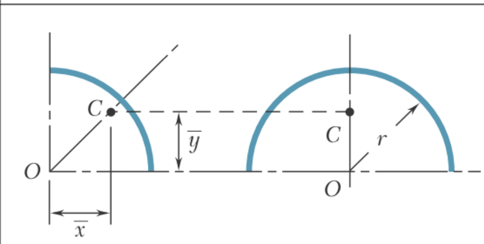
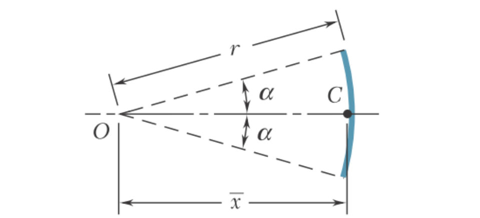
مرکز هندسی سطوح متعارف:

	شکل	$\bar{x}$	$\bar{y}$	مساحت
مثلث			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
ربع دایره		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
نیم دایره		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
اسپاندرل		$\frac{n+1}{n+2}a$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{ah}{n+1}$
قطاع دایره		$\frac{2r \sin \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

مرکز هندسی سطوح متعارف (ادامه):

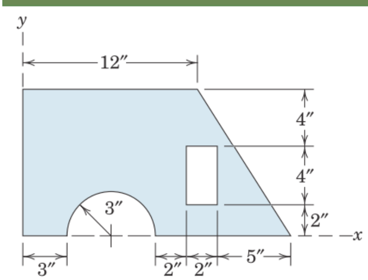
	شکل	$\bar{x}$	$\bar{y}$	مساحت
ربع بیضی		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
نیم بیضی		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
نیم سهمی		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
سهمی		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$

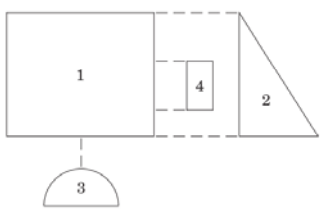
مرکز هندسی قوسهای متعارف:

طول قوس	$\bar{y}$	$\bar{x}$	شکل قوس(کمان)	
$\frac{\pi r}{2}$	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$		**ربع قوس دایره**
πr	$\frac{2r}{\pi}$	0		**نیم قوس دایره**
$2\alpha r$	0	$\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$		**قوسی از دایره**

مثال:

موقعیت مرکز سطح را برای سطح داده شده بدست آورید.





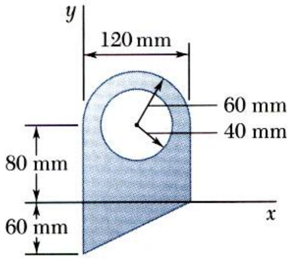
PART	A in.^{2}	$\bar{x}$ in.	$\bar{y}$ in.	$\bar{x}A$ in.^{3}	$\bar{y}A$ in.^{3}
1	120	6	5	720	600
2	30	14	10/3	420	100
3	−14.14	6	1.273	−84.8	−18
4	−8	12	4	−96	−32
TOTALS	127.9			959	650

$$\left[\bar{X} = \frac{\Sigma A\bar{x}}{\Sigma A}\right] \qquad \bar{X} = \frac{959}{127.9} = 7.50 \text{ in.}$$

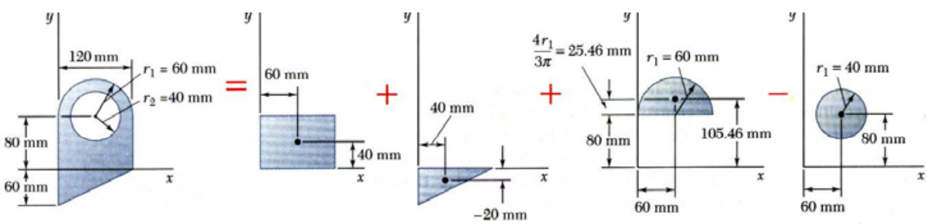
$$\left[\bar{Y} = \frac{\Sigma A\bar{y}}{\Sigma A}\right] \qquad \bar{Y} = \frac{650}{127.9} = 5.08 \text{ in.}$$

مثال:

موقعیت مرکز سطح و گشتاور اول سطح را برای سطح داده شده بدست آورید.



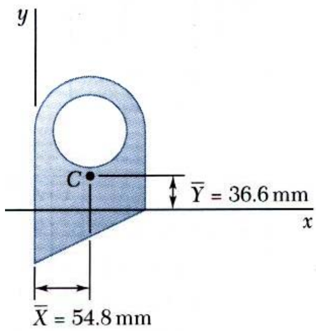
حل:



Component	A, mm²	$\bar{x}$, mm	$\bar{y}$, mm	$\bar{x}A$, mm³	$\bar{y}A$, mm³
Rectangle	$(120)(80) = 9.6 \times 10^3$	60	40	$+576 \times 10^3$	$+384 \times 10^3$
Triangle	$\frac{1}{2}(120)(60) = 3.6 \times 10^3$	40	-20	$+144 \times 10^3$	-72×10^3
Semicircle	$\frac{1}{2}\pi(60)^2 = 5.655 \times 10^3$	60	105.46	$+339.3 \times 10^3$	$+596.4 \times 10^3$
Circle	$-\pi(40)^2 = -5.027 \times 10^3$	60	80	-301.6×10^3	-402.2×10^3
	$\Sigma A = 13.828 \times 10^3$			$\Sigma\bar{x}A = +757.7 \times 10^3$	$\Sigma\bar{y}A = +506.2 \times 10^3$

$$\boxed{\begin{aligned} Q_x &= +506.2 \times 10^3 \,\text{mm}^3 \\ Q_y &= +757.7 \times 10^3 \,\text{mm}^3 \end{aligned}}$$

حل (ادامه):



$$\bar{X} = \frac{\sum \bar{x}A}{\sum A} = \frac{+757.7\times10^3\,\text{mm}^3}{13.828\times10^3\,\text{mm}^2}$$

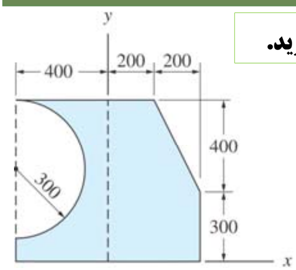
$$\boxed{\bar{X} = 54.8\,\text{mm}}$$

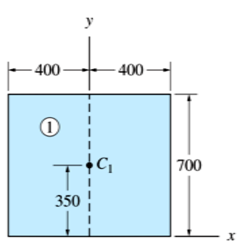
$$\bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{+506.2\times10^3\,\text{mm}^3}{13.828\times10^3\,\text{mm}^2}$$

$$\boxed{\bar{Y} = 36.6\,\text{mm}}$$

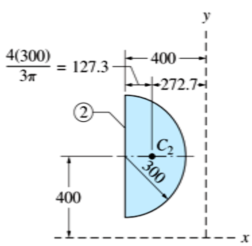
مثال:

موقعیت مرکز سطح و گشتاور اول سطح را برای سطح داده شده بدست آورید.

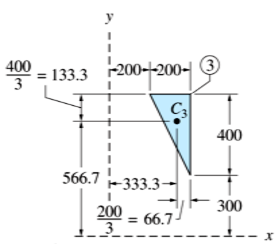




Area = (700)(800) = 560 × 10^3 mm^2 ⊕



Area = $\frac{\pi}{2}(300)^2$ = 141.4 × 10^3 mm^2 ⊖



Area = $\frac{1}{2}$(200)(400) = 40 × 10^3 mm^2 ⊖

ادامه حل:

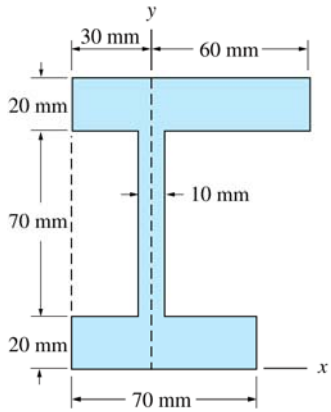
Shape	Area A (mm^2)	$\bar{x}$ (mm)	$A\bar{x}$ (mm^3)	$\bar{y}$ (mm)	$A\bar{y}$ (mm^3)
1 (Rectangle)	$+560.0 \times 10^3$	0	0	+350	196.0×10^6
2 (Semicircle)	-141.4×10^3	−272.7	$+38.56 \times 10^6$	+400	-56.56×10^6
3 (Triangle)	-40.0×10^3	+333.3	-13.33×10^6	+566.7	-22.67×10^6
Σ	$+378.6 \times 10^3$	···	$+25.23 \times 10^6$	···	$+116.77 \times 10^6$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma A\bar{x}}{\Sigma A} = \frac{+25.23 \times 10^6}{+378.6 \times 10^3} = 66.6 \text{ mm}$$

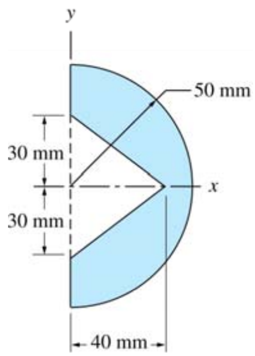
$$\bar{y} = \frac{\Sigma A\bar{y}}{\Sigma A} = \frac{+116.77 \times 10^6}{+378.6 \times 10^3} = 308 \text{ mm}$$

تکلیف منزل:

موقعیت مرکز سطح و گشتاور اول سطح را برای سطوح داده شده بدست آورید.



$\bar{x} = 87.2$ mm, $\bar{y} = 59.6$ mm

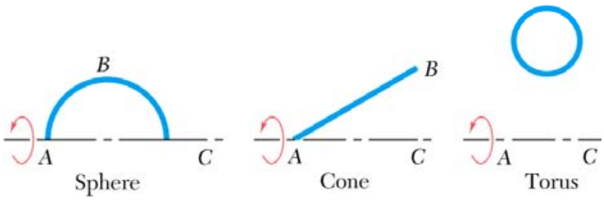


$\bar{x} = 24.7$ mm, $\bar{y} = 0$

قضایای پاپوس – گلدینوس 1:

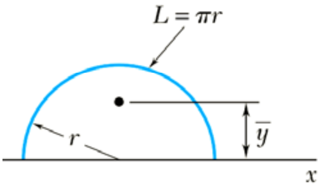
سطح حاصل از دوران یک خط (یا منحنی) = طول خط، ضربدر جابجایی مرکز خط

$$A = 2\pi \bar{y} L$$



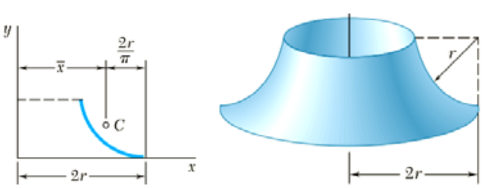
مثال:

براساس قضیه پاپوس موقعیت مرکز نیم قوس دایره را (با معلوم بودن سطح خارجی کره) بدست آورید.



$$A = 2\pi \bar{y} L \qquad 4\pi r^2 = 2\pi \bar{y}(\pi r) \qquad \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$$

مساحت حاصل از دوران ربع قوس دایره نشان داده شده را حول محور y بدست آورید.



$$\bar{x} = 2r - \frac{2r}{\pi} = 2r\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)$$

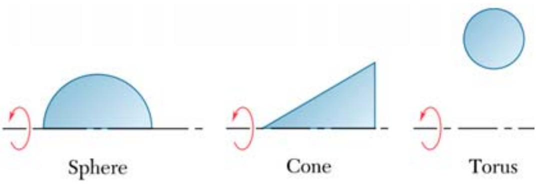
$$A = 2\pi \bar{x} L = 2\pi\left[2r\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)\right]\left(\frac{\pi r}{2}\right)$$

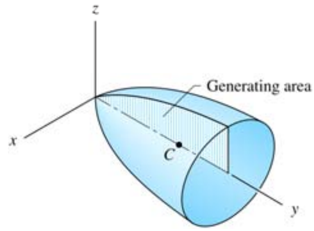
$$A = 2\pi r^2(\pi - 1)$$

قضایای پاپوس – گلدینوس 2:

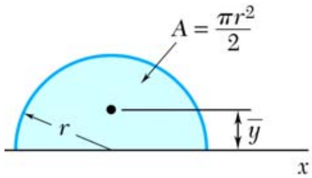
حجم حاصل از دوران یک سطح = مساحت سطح ، ضربدر جابجایی مرکز سطح

$$\boxed{V = 2\pi \bar{y}\ A}$$





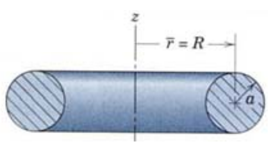
مثال: مرکز هندسی سطح نیم دایره را (با معلوم بودن حجم کره) بدست آورید.



$$V = 2\pi\bar{y}A \qquad \tfrac{4}{3}\pi r^3 = 2\pi\bar{y}(\tfrac{1}{2}\pi r^2) \qquad \bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

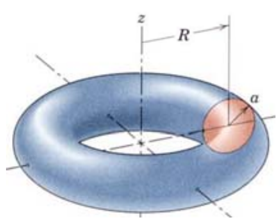
مثال:

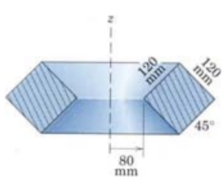
مثال: مساحت خارجی و حجم بدست آمده از دوران دایره ای به شعاع a را حول محور z تعیین کنید.

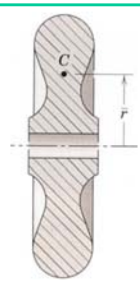


$$A = \theta\bar{r}L = 2\pi(R)(2\pi a) = 4\pi^2 Ra$$

$$V = \theta\bar{r}A = 2\pi(R)(\pi a^2) = 2\pi^2 Ra^2$$

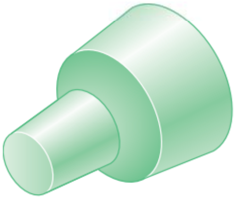


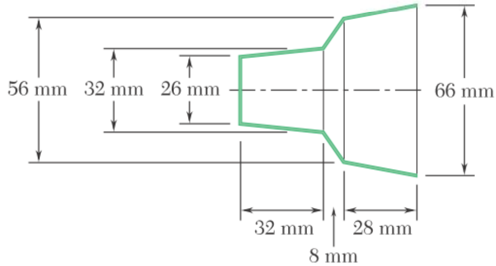




تکلیف منزل:

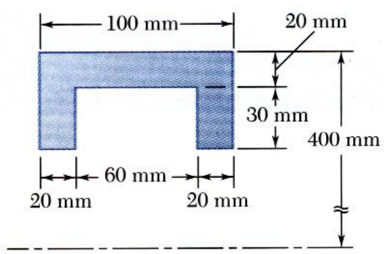
محفظه یک لامپ از ورق آلومینیومی به ضخامت ۱ میلیمتر مطابق شکل ساخته شده است. چگالی آلومینیوم 2800 kg/m3 **است. جرم محفظه را تعیین کنید.**





m =0.0305 kg

Sample Problem 5.7



The outside diameter of a pulley is 0.8 m, and the cross section of its rim is as shown. Knowing that the pulley is made of steel and that the density of steel is $\rho = 7.85\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ determine the mass and weight of the rim.

<u>SOLUTION</u>:

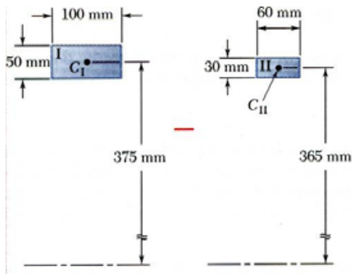
- Apply the theorem of Pappus-Guldinus to evaluate the volumes or revolution for the rectangular rim section and the inner cutout section.
- Multiply by density and acceleration to get the mass and acceleration.

Sample Problem 5.7

SOLUTION:

- Apply the theorem of Pappus-Guldinus to evaluate the volumes or revolution for the rectangular rim section and the inner cutout section.

- Multiply by density and acceleration to get the mass and acceleration.

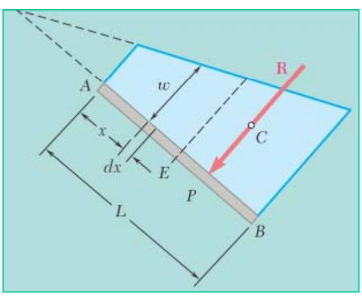


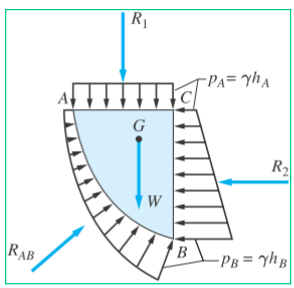
	Area, mm²	$\bar{y}$, mm	Distance Traveled by C, mm	Volume, mm³
I	+5000	375	$2\pi(375) = 2356$	$(5000)(2356) = 11.78 \times 10^6$
II	−1800	365	$2\pi(365) = 2293$	$(-1800)(2293) = -4.13 \times 10^6$
				Volume of rim $= 7.65 \times 10^6$

$$m = \rho V = \left(7.85\times10^3\ \mathrm{kg/m^3}\right)\left(7.65\times10^6\ \mathrm{mm^3}\right)\left(10^{-9}\ \mathrm{m^3/mm^3}\right) \qquad \boxed{m = 60.0\ \mathrm{kg}}$$

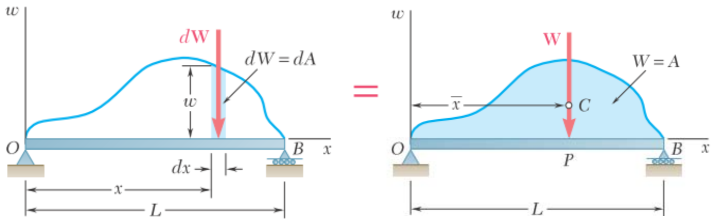
$$W = mg = (60.0\ \mathrm{kg})\left(9.81\ \mathrm{m/s^2}\right) \qquad \boxed{W = 589\ \mathrm{N}}$$

بارهای گسترده:





بارهای گسترده روی تیرها:



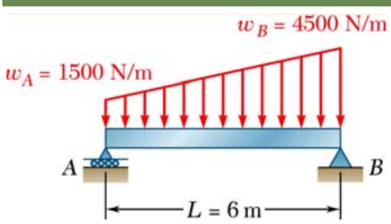
$$W = \int_0^L w\,dx = \int dA = A$$

$$(OP)W = \int x dW$$

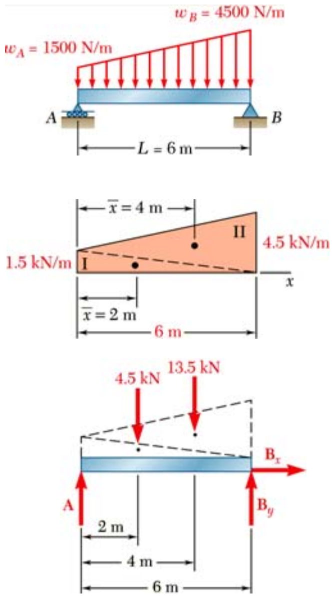
$$(OP)A = \int_0^L x dA = \bar{x}A$$

مثال:

عکس العمل تکیه گاهی را در A و B بدست آورید.



حل:



Component	A, kN	$\bar{x}$, m
Triangle I	4.5	2
Triangle II	13.5	4

$$\sum M_A = 0: \quad B_y(6) - (4.5)(2) - (13.5)(4) = 0$$

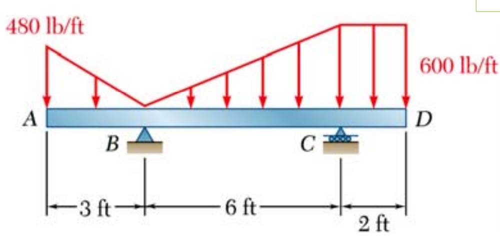
$$\boxed{B_y = 10.5\ \text{kN}}$$

$$\sum F_y = 0: \quad A_y - 4.5 - 13.5 + 10.5 = 0$$

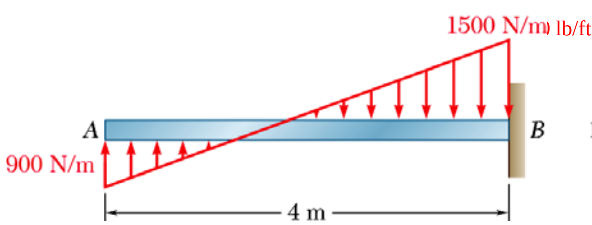
$$\boxed{A_y = 7.5\ \text{kN}}$$

مثال:

عکس العمل تکیه گاهی را در A و B بدست آورید.



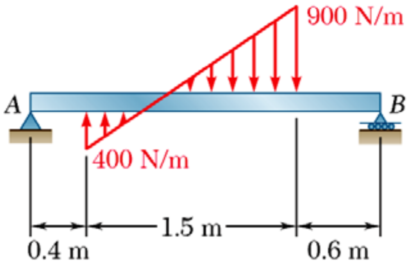
B = 1360 lb ↑; **C** = 2360 lb ↑.



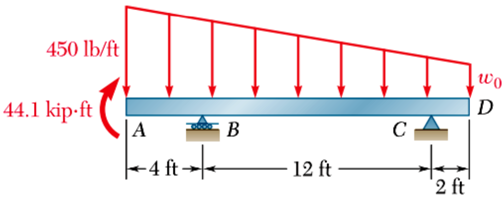
B = 1200 N ↑, $\mathbf{M}_B$ = 800 N · m ↰.

تکلیف منزل:

عکس العمل تکیه گاهی را در A و B بدست آورید.



$\mathbf{A} = 105\ \text{N} \uparrow, \mathbf{B} = 270\ \text{N} \uparrow$



$\mathbf{B} = 150.0\ \text{lb} \uparrow; \mathbf{C} = 5250\ \text{lb} \uparrow$

Ninth Edition

CHAPTER

6

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS:

STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

تحلیل سازه‌ها

سرفصل مطالب و مسائل فصل ششم برای حل:

فصل ششم: تحلیل سازه (خرپا)

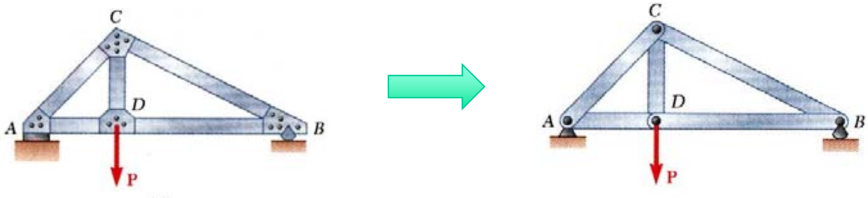
۱– تعریف خرپا

۲– تحلیل خرپا به روش تعادل مفصل (روش گره)

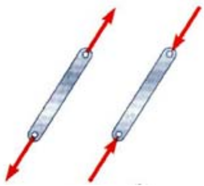
۳– تحلیل خرپا به روش برش (روش مقاطع)

تعریف خرپا:

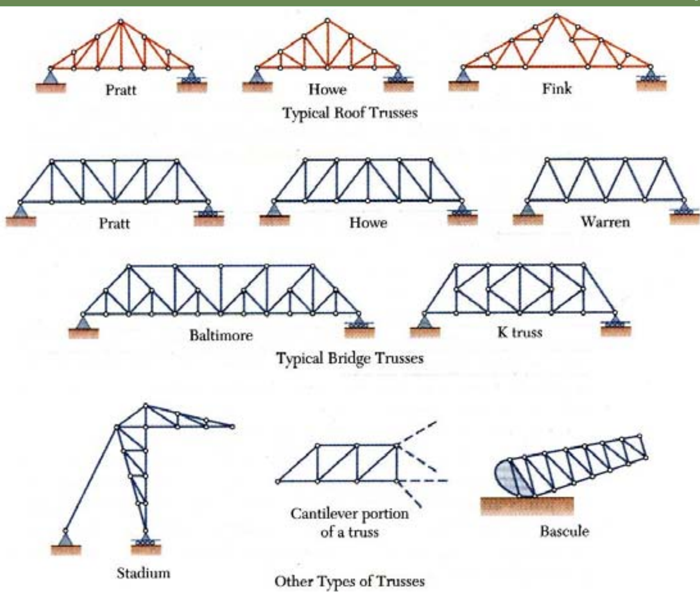
تعریف خرپا: خرپا ها مثل تیر ها برای تحمل بار طراحی می‌شوند. خرپاها از تعدادی عضو دونیرویی مستقیم تشکیل می‌شوند که توسط نقاط انتهایی شان به یکدیگر متصل می‌شوند.



عضو دونیرویی تحت کشش یا فشار



انواع خرپا:



تحلیل خرپا:

تحلیل خرپا:

نیروی تکیه‌گاهی در خرپاها، با استفاده از روش تعادل (بررسی تعادل کل خرپا) تعیین می‌شود.

همچنین برای تعیین نیروی داخلی هرعضو از خرپا، از روش تعادل مفصل و تعادل مقطع استفاده می‌گردد. لذا برای تحلیل خرپا از دو روش زیر استفاده می شود:

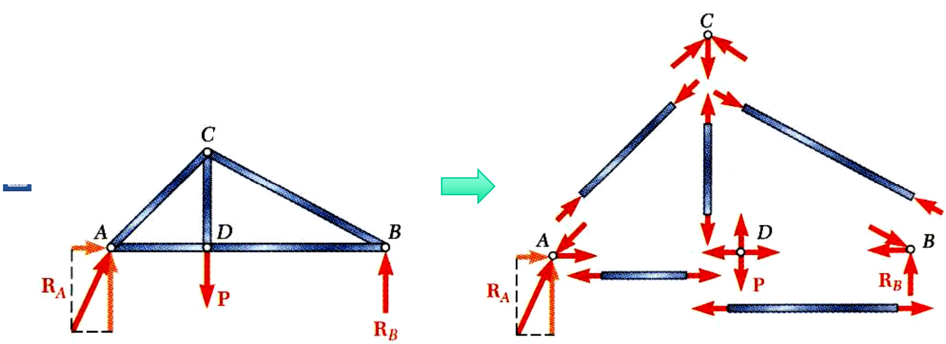
۱– تحلیل خرپا به روش تعادل مفصل (روش گره)

۲– تحلیل خرپا به روش برش (روش مقاطع)

روش تعادل مفصل برای حل مسائل خرپا:

۱– تحلیل خرپا به روش تعادل مفصل (روش گره)

در این روش بعد از تعیین نیروی عکس العمل تکیه‌گاهی، با بررسی تعادل هر مفصل، نیرو در عضوهای مرتبط به آن مفصل تعیین می‌گردد.



تعیین عکس العمل تکیه گاهی

بررسی تعادل هر مفصل و
تعیین نیروی داخلی اعضا

تعادل یک نقطه مادی (تعادل ذره) {یادآوری فصل دوم}

طبق قانون اول نیوتن، برایند نیروهای وارد بر یک ذره در حال تعادل صفر است. لذا داریم:

$$\vec{R}=\sum \vec{F}=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} \Rightarrow \; 1\text{-} \quad \text{ترسیم چند ضلعی بسته نیروها} \\ \\ \Rightarrow \; 2\text{-} \begin{cases} R_x=0 \quad \Rightarrow \quad \sum F_x=0 \\ R_y=0 \quad \Rightarrow \quad \sum F_y=0 \end{cases} \end{cases}$$

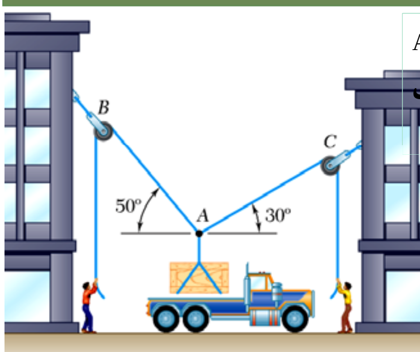
بنابراین برای حل مسائل به روش تعادل ذره، باید یک نقطه مادی را در نظر بگیریم و ابتدا نمودار آزاد نقطه را ترسیم نموده به یکی از دو روش فوق عمل کنیم. یعنی:

۱– نیروهای وارد بر نقطه مادی را بدنبال یکدیگر ترسیم کرده و چند ضلعی بسته‌ای را ترسیم کنیم.

۲– معادلات تعادل را برای نیروهای وارد بر نقطه مادی بنویسیم.

مثال تعادل یک نقطه مادی : {یادآوری فصل دوم}

مثال– بار ۷۳۶ نیوتنی نشان داده شده، توسط دو کابل AC و AB نگه داشته شده است. مطلوبست تعیین نیروی کشش در هریک از این دو کابل.

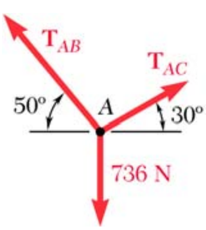


حل) در حل مسائل به روش تعادل به یکی از دو صورت زیر عمل می شود.

۱– ترسیم نمودار آزاد

۲– ترسیم چند ضلعی بسته نیروها

۳– تعیین نیروهای مجهول به کمک روابط مثلثاتی (SIN و COS)



یا

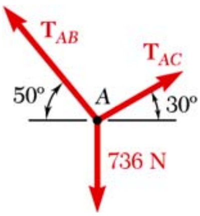
۱– ترسیم نمودار آزاد

۲– نوشتن معادلات تعادل

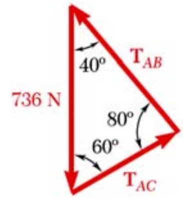
۳– تعیین نیروهای مجهول به کمک حل این معادلات

مثال تعادل یک نقطه مادی : {یادآوری فصل دوم}

نمودار آزاد نقطه A :



چند ضلعی بسته نیروها:



روابط مثلثاتی:

$$\frac{T_{AB}}{\sin 60°} = \frac{T_{AC}}{\sin 40°} = \frac{736\ \text{N}}{\sin 80°}$$

$$T_{AB} = 647\ \text{N} \qquad T_{AC} = 480\ \text{N}$$

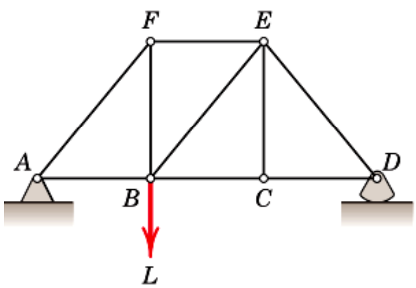
نوشتن معادلات تعادل:

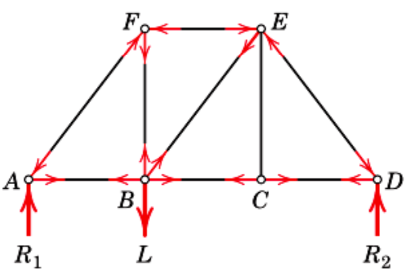
$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \\ \sum F_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -T_{AB}\cos 50 + T_{AC}\cos 30 = 0 \\ T_{AB}\sin 50 + T_{AC}\sin 30 - 736 = 0 \end{cases}$$

حل معادلات تعادل:

$$\begin{cases} T_{AB} = 1.347\, T_{AC} \\ (1.347\, T_{AC})\sin 50 + T_{AC}\sin 30 = 736 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{AB} = 647\ N \\ T_{AC} = 480\ N \end{cases}$$

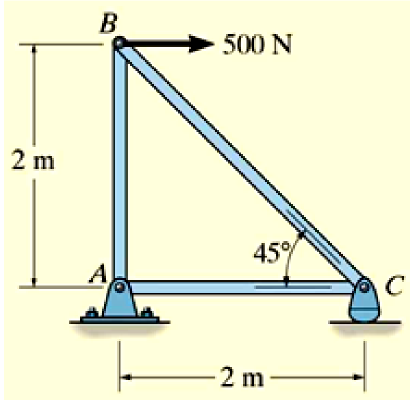
مثال تعادل مفصل در خرپا:



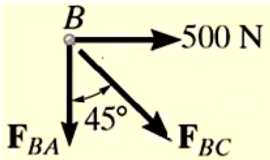


مثال 1:

بر اساس روش مفصل (تعادل مفصل)، نیروی داخلی هر عضو را تعیین کنید.



بررسی تعادل گره B

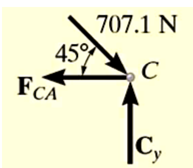


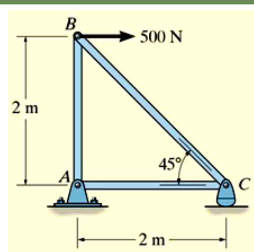
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad 500\text{ N} + F_{BC} \sin 45° = 0 \qquad F_{BC} = -707.1\text{ N} \quad (C)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad -F_{BC} \cos 45° - F_{BA} = 0 \qquad F_{BA} = 500\text{ N} \quad (T)$$

مثال 1:

بررسی تعادل گره C

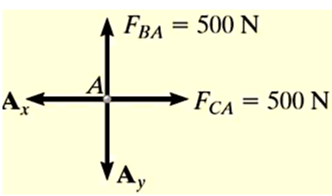




$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \quad -F_{CA} + 707.1 \cos 45°\text{ N} = 0 \qquad F_{CA} = 500\text{ N (T)}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad C_y - 707.1 \sin 45°\text{ N} = 0 \qquad C_y = 500\text{ N}$$

بررسی تعادل گره A



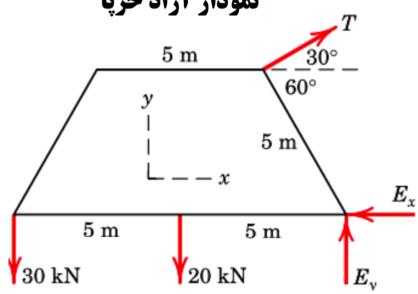
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = 0; \qquad 500\text{ N} - A_x = 0 \qquad A_x = 500\text{ N}$$

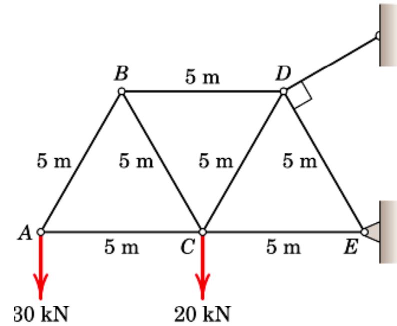
$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad 500\text{ N} - A_y = 0 \qquad A_y = 500\text{ N}$$

مثال 2:

بر اساس روش مفصل (تعادل مفصل)، نیروی داخلی هر عضو را تعیین کنید.

نمودار آزاد خرپا

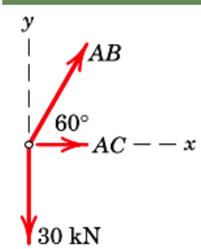


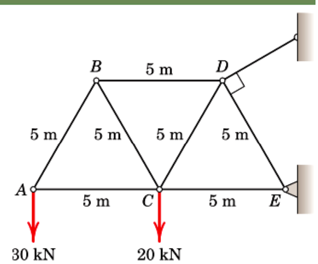


$[\Sigma M_E = 0]$	$5T - 20(5) - 30(10) = 0$	$T = 80$ kN
$[\Sigma F_x = 0]$	$80 \cos 30° - E_x = 0$	$E_x = 69.3$ kN
$[\Sigma F_y = 0]$	$80 \sin 30° + E_y - 20 - 30 = 0$	$E_y = 10$ kN

حل مثال 1:

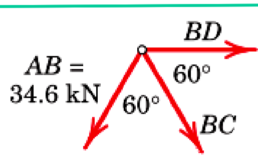
بررسی تعادل مفصل A:





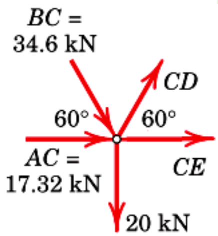
$[\Sigma F_y = 0]$	$0.866AB - 30 = 0$	$AB = 34.6$ kN	T
$[\Sigma F_x = 0]$	$AC + 0.5(34.6) = 0$	$AC = -17.32$ kN	C

بررسی تعادل مفصل B:

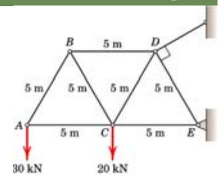


$[\Sigma F_y = 0]$	$-0.866BC - 0.866(34.6) = 0$	$BC = -34.6$ kN	C
$[\Sigma F_x = 0]$	$BD - (0.5)(34.6) + (0.5)(-34.6) = 0$	$BD = 34.6$ kN	T

حل مثال 1:



بررسی تعادل مفصل C:



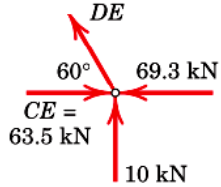
$$[\Sigma F_y = 0] \qquad 0.866CD - 0.866(34.6) - 20 = 0$$

$$CD = 57.7\ \text{kN} \quad T$$

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad CE + 17.32 + 0.5(34.6) + 0.5(57.7) = 0$$

$$CE = -\ 63.5\ \text{kN} \quad C$$

بررسی تعادل مفصل E:

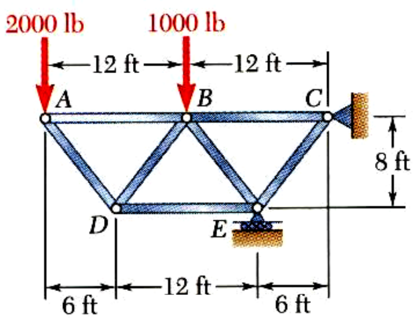


$$[\Sigma F_y = 0] \qquad 0.866DE + 10 = 0 \qquad DE = -11.55\ \text{kN} \quad C$$

6 - 15

مثال 2 :

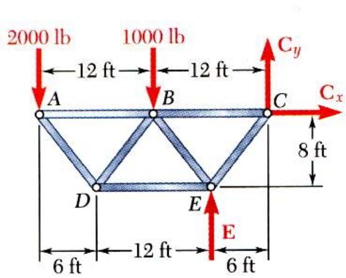
بر اساس روش مفصل (تعادل مفصل)، نیروی داخلی هر عضو را تعیین کنید.



حل مثال 2:

حل:

ابتدا با بررسی تعادل کل خرپا، عکس العمل تکیه گاهی تعیین می‌شود.



$$\sum M_C = 0$$

$$(2000\text{ lb})(24\text{ ft}) + (1000\text{ lb})(12\text{ ft}) - E(6\text{ ft}) = 0$$

$$\boxed{E = 10{,}000\text{ lb} \uparrow}$$

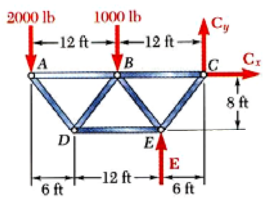
$$\sum F_x = 0 = C_x$$

$$\boxed{C_x = 0}$$

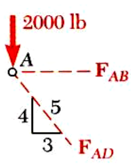
$$\sum F_y = 0 = -2000\text{ lb} - 1000\text{ lb} + 10{,}000\text{ lb} + C_y$$

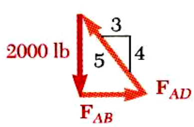
$$\boxed{C_y = 7000\text{ lb} \downarrow}$$

حل مثال 1(ادامه):



بررسی تعادل مفصل A.

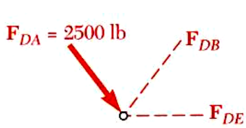


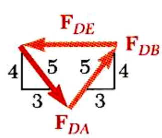


$$\frac{2000\text{ lb}}{4} = \frac{F_{AB}}{3} = \frac{F_{AD}}{5}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_{AB} &= 1500\text{ lb } T \\ F_{AD} &= 2500\text{ lb } C \end{aligned}}$$

بررسی تعادل مفصل D.



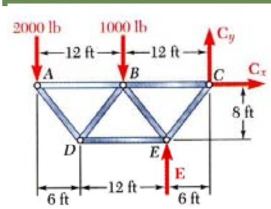


$$F_{DB} = F_{DA}$$

$$F_{DE} = 2\left(\tfrac{3}{5}\right)F_{DA}$$

$$\boxed{\begin{aligned} F_{DB} &= 2500\text{ lb } T \\ F_{DE} &= 3000\text{ lb } C \end{aligned}}$$

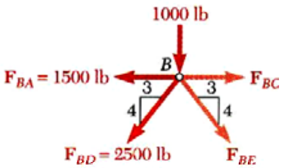
حل مثال 1(ادامه):



بررسی تعادل مفصل **B**.

$$\sum F_y = 0 = -1000 - \tfrac{4}{5}(2500) - \tfrac{4}{5}F_{BE}$$

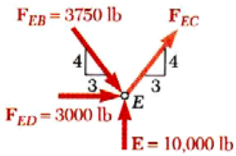
$$F_{BE} = -3750\ \text{lb} \qquad \boxed{F_{BE} = 3750\ \text{lb}\ C}$$



$$\sum F_x = 0 = F_{BC} - 1500 - \tfrac{3}{5}(2500) - \tfrac{3}{5}(3750)$$

$$F_{BC} = +5250\ \text{lb} \qquad \boxed{F_{BC} = 5250\ \text{lb}\ T}$$

بررسی تعادل مفصل **E**.



$$\sum F_x = 0 = \tfrac{3}{5}F_{EC} + 3000 + \tfrac{3}{5}(3750)$$

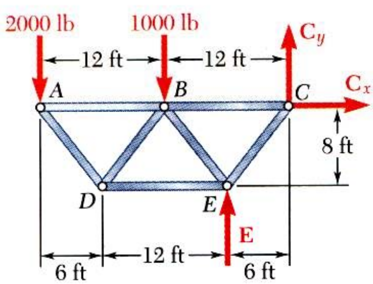
$$F_{EC} = -8750\ \text{lb}$$

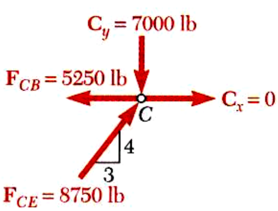
$$\boxed{F_{EC} = 8750\ \text{lb}\ C}$$

حل مثال 1(ادامه):

بررسی تعادل مفصل **C** برای کنترل

جوابهای بدست آمده:



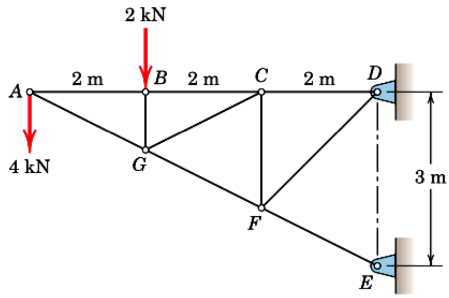


$$\sum F_x = -5250 + \tfrac{3}{5}(8750) = 0 \quad \text{(checks)}$$

$$\sum F_y = -7000 + \tfrac{4}{5}(8750) = 0 \quad \text{(checks)}$$

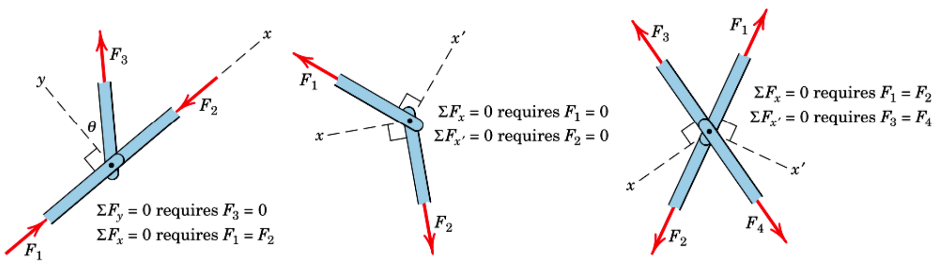
تکلیف منزل:

بر اساس روش مفصل (تعادل مفصل)، نیروی داخلی عضو GC و FC را تعیین کنید.

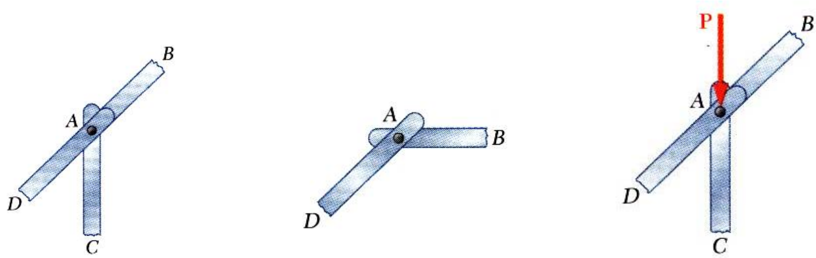


$CG = 2.24 \text{ kN } T, CF = 1 \text{ kN } C$

عضوهای صفر:

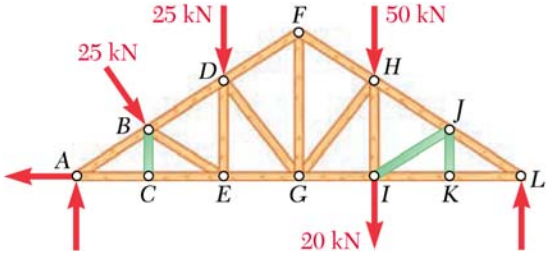


(a) (b) (c)



مثال:

در خرپای نشان داده شده عضوهای صفر را مشخص کنید.



روش برش برای حل مسائل خرپا:

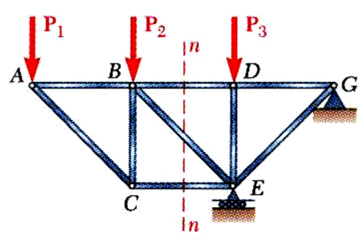
۲– تحلیل خرپا به روش برش (روش مقاطع)

روش برش ، برای وقتیکه تنها نیروی یک یا چند عضو از خرپا مورد نظر باشد کارامدتر است.

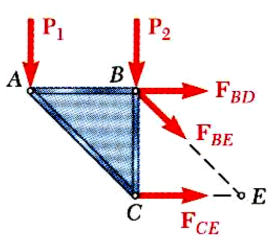
در این روش بعد از تعیین نیروی عکس العمل تکیه‌گاهی ، دو گام زیر اجرا می‌شود:

۱– تعیین مسیر برش بگونه‌ای که عضو مورد نظر و حداکثر سه عضو از خرپا برش بخورد.

۲– با بررسی تعادل یکی از دو قسمت برش خورده می‌توان نیروهای اعضا برش خورده را بدست آورد (سه مجهول حل می‌شود).



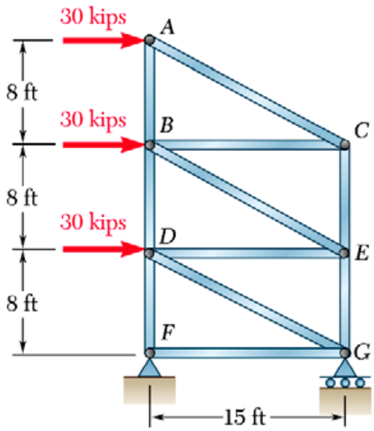
تعیین مسیر برش



بررسی تعادل سمت چپ برش nn

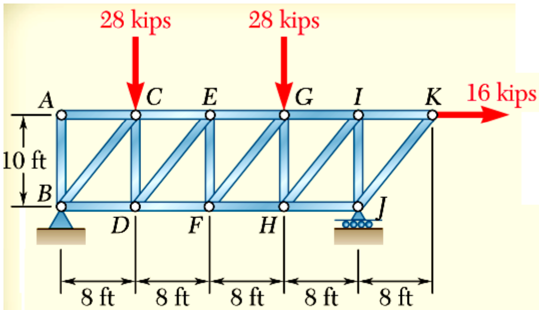
مثال:

بر اساس روش برش، نیروی داخلی عضوهای BD **و** DE **را تعیین کنید.**

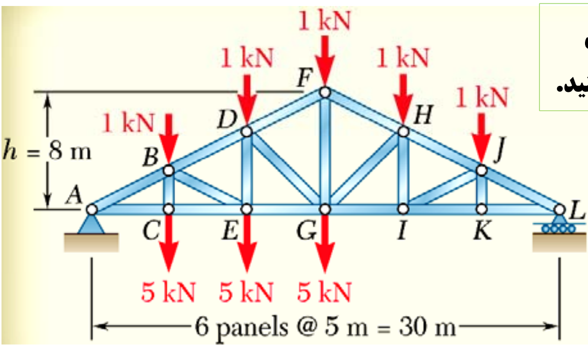


مثال:

بر اساس روش برش، نیروی داخلی عضوهای EF **و** GI **را تعیین کنید.**

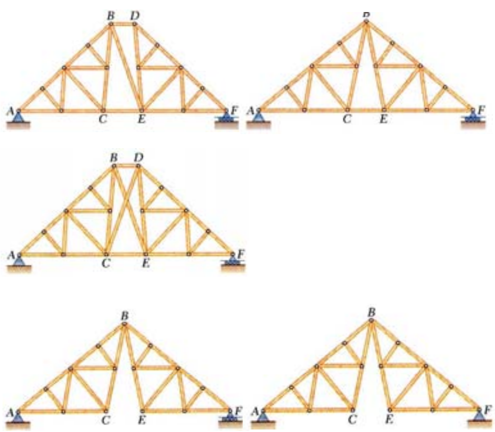


مثال:



بر اساس روش برش، نیروی داخلی عضوهای FHو GIو GH را تعیین کنید.

Trusses Made of Several Simple Trusses

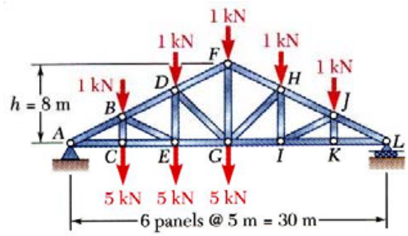


non-rigid
$m < 2n - 3$

rigid
$m < 2n - 4$

- *Compound trusses* are statically determinant, rigid, and completely constrained.
  $$m = 2n - 3$$
- Truss contains a *redundant member* and is *statically indeterminate.*
  $$m > 2n - 3$$
- Additional reaction forces may be necessary for a rigid truss.
- Necessary but insufficient condition for a compound truss to be statically determinant, rigid, and completely constrained,
  $$m + r = 2n$$

حل:

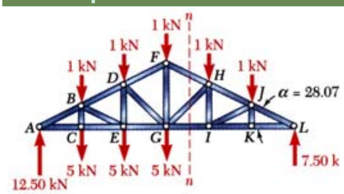


SOLUTION:

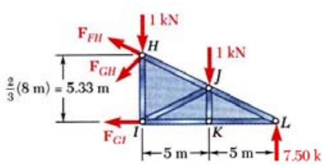
- Take the entire truss as a free body. Apply the conditions for static equilibrium to solve for the reactions at *A* and *L*.

$$\sum M_A = 0 = -(5\text{ m})(6\text{ kN}) - (10\text{ m})(6\text{ kN}) - (15\text{ m})(6\text{ kN})$$
$$- (20\text{ m})(1\text{ kN}) - (25\text{ m})(1\text{ kN}) + (25\text{ m})L$$
$$L = 7.5\text{ kN} \uparrow$$
$$\sum F_y = 0 = -20\text{ kN} + L + A$$
$$A = 12.5\text{ kN} \uparrow$$

Sample Problem 6.3



- Pass a section through members *FH*, *GH*, and *GI* and take the right-hand section as a free body.

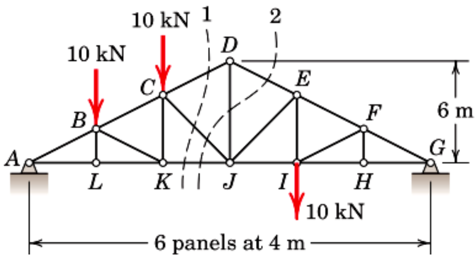


- Apply the conditions for static equilibrium to determine the desired member forces.

$$\sum M_H = 0$$
$$(7.50\text{ kN})(10\text{ m}) - (1\text{ kN})(5\text{ m}) - F_{GI}(5.33\text{ m}) = 0$$
$$F_{GI} = +13.13\text{ kN}$$
$$\boxed{F_{GI} = 13.13\text{ kN}\ \ T}$$

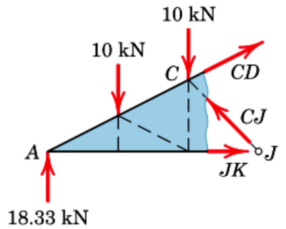
مثال:

بر اساس روش برش، نیروی داخلی عضو DG را تعیین کنید.



حل:

بررسی تعادل (سمت چپ) برش ۱

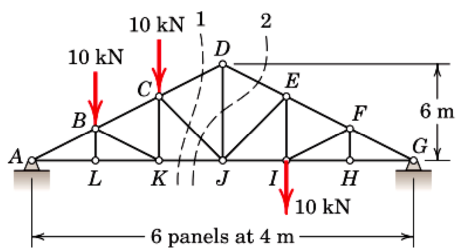


$[\Sigma M_A = 0] \qquad 0.707CJ(12) - 10(4) - 10(8) = 0 \qquad CJ = 14.14 \text{ kN } C$

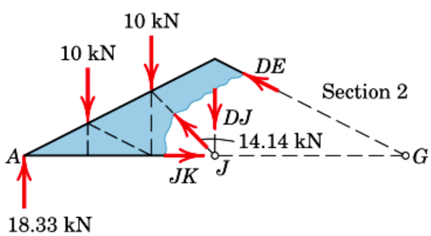
$[\Sigma M_J = 0] \qquad 0.894CD(6) + 18.33(12) - 10(4) - 10(8) = 0$

$CD = -18.63 \text{ kN}$

مثال:



بررسی تعادل (سمت چپ) برش۲

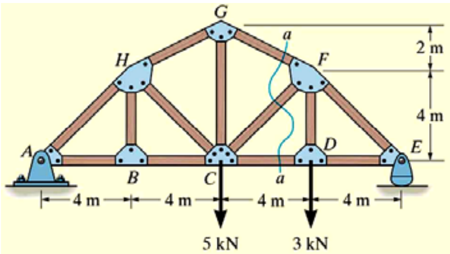


$[\Sigma M_G = 0] \qquad 12DJ + 10(16) + 10(20) - 18.33(24) - 14.14(0.707)(12) = 0$

$DJ = 16.67 \text{ kN } T$

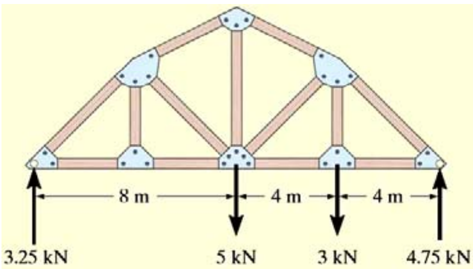
مثال:

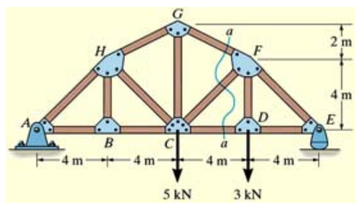
بر اساس روش برش، نیروی داخلی عضو CF را تعیین کنید.



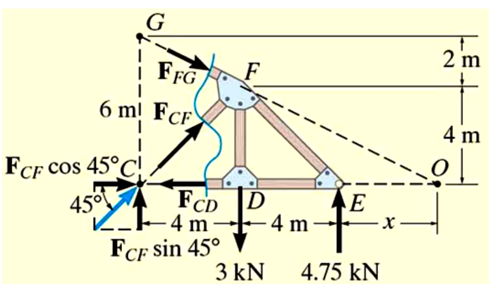
حل:

تعیین عکس العمل در تکیه گاه E





بررسی تعادل سمت راست برش a-a



$$\circlearrowleft +\Sigma M_O = 0;$$

$$-F_{CF}\sin 45°(12\text{ m}) + (3\text{ kN})(8\text{ m}) - (4.75\text{ kN})(4\text{ m}) = 0$$

$$F_{CF} = 0.589\text{ kN} \quad (\text{C}) \qquad \textit{Ans.}$$

Ninth Edition

CHAPTER

7

VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS:

STATICS

Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

نیروها در تیرها و کابلها

سرفصل مطالب و مسائل فصل هفتم :

فصل هفتم: تحلیل تیرها

۱– ترسیم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی به روش برش

۲– ترسیم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی به روش سطح زیر منحنی

تحلیل تیر:

تحلیل تیرها:

هدف ترسیم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی در طول تیر می باشد که به کمک آن مقادیر حداکثر آنها (نیرو و گشتاور) تعیین شده و جهت طراحی تیر مورد استفاده قرار می گیرد. برای ترسیم نمودارهای مذکور از دو روش زیر استفاده می شود:

۱– روش برش

۲– روش سطح زیر منحنی (روش جمع زنی)

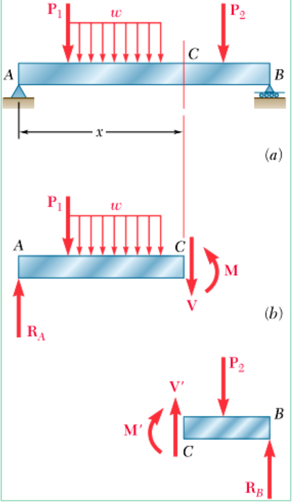
1- روش برش برای ترسیم نمودار V و M

در روش برش مراحل زیر (جهت ترسیم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی) انجام می شود:

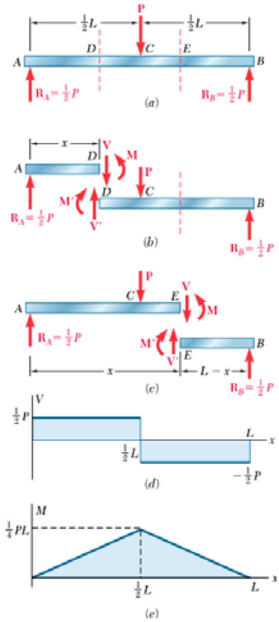
۱– تعیین نیروی عکس العمل تکیه‌گاهی.

۲– برش تیر در حد فاصل نیروهای اعمالی به آن. در مقطع برش، جهتهای نیروی برشی و گشتاور خمشی بصورت مقابل در نظر گرفته می شود.

۳– نوشتن معادلات تعادل برای یکی از دو قسمت برش خورده. که براساس این معادلات، نیروی برشی V و گشتاور خمشی M بر حسب طول تیر x (در حد فاصل مورد نظر) تعیین می شود.

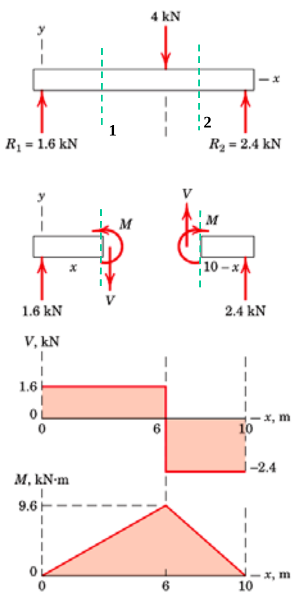


Shear and Bending Moment Diagrams

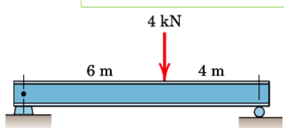


- Variation of shear and bending moment along beam may be plotted.
- Determine reactions at supports.
- Cut beam at D and consider member AD,
  $V = +P/2 \quad M = +Px/2$
- Cut beam at E and consider member EB,
  $V = -P/2 \quad M = +P(L-x)/2$
- For a beam subjected to <u>concentrated loads</u>, shear is constant between loading points and moment varies linearly.

مثال 1



بر اساس روش برش، نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی را ترسیم نمایید.



بررسی تعادل سمت چپ برش ۱

$[\Sigma F_y = 0] \qquad 1.6 - V = 0 \qquad \boxed{V = 1.6 \text{ kN}}$

$[\Sigma M_{R_1} = 0] \qquad M - 1.6x = 0 \qquad \boxed{M = 1.6x}$

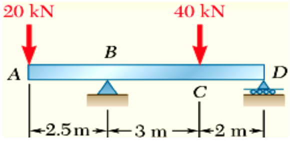
بررسی تعادل سمت راست برش ۲

$[\Sigma F_y = 0] \qquad V + 2.4 = 0 \qquad \boxed{V = -2.4 \text{ kN}}$

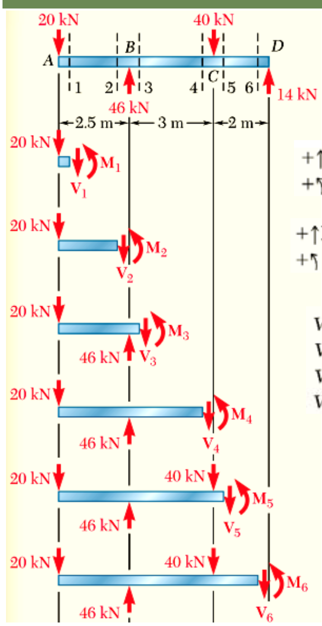
$[\Sigma M_{R_2} = 0] \qquad -(2.4)(10 - x) + M = 0 \qquad \boxed{M = 2.4(10 - x)}$

مثال 2

بر اساس روش برش، نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده مقابل ، ترسیم نمایید.



حل مثال 2:



$\mathbf{R}_B = 46 \text{ kN} \uparrow \qquad \mathbf{R}_D = 14 \text{ kN} \uparrow$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -20 \text{ kN} - V_1 = 0 \qquad V_1 = -20 \text{ kN}$

$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0: \quad (20 \text{ kN})(0 \text{ m}) + M_1 = 0 \qquad M_1 = 0$

$+\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad -20 \text{ kN} - V_2 = 0 \qquad V_2 = -20 \text{ kN}$

$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0: \quad (20 \text{ kN})(2.5 \text{ m}) + M_2 = 0 \qquad M_2 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$

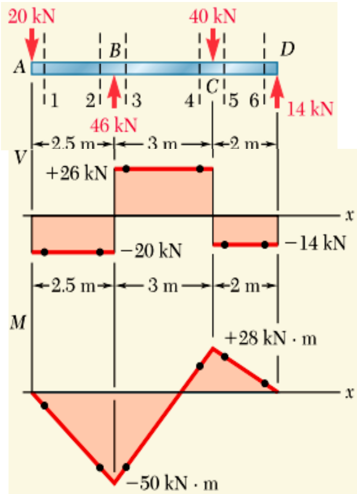
$V_3 = +26 \text{ kN} \qquad M_3 = -50 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$V_4 = +26 \text{ kN} \qquad M_4 = +28 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$V_5 = -14 \text{ kN} \qquad M_5 = +28 \text{ kN} \cdot \text{m}$

$V_6 = -14 \text{ kN} \qquad M_6 = 0$

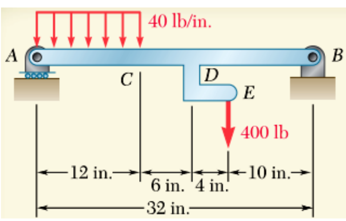
ادامه حل مثال 2:



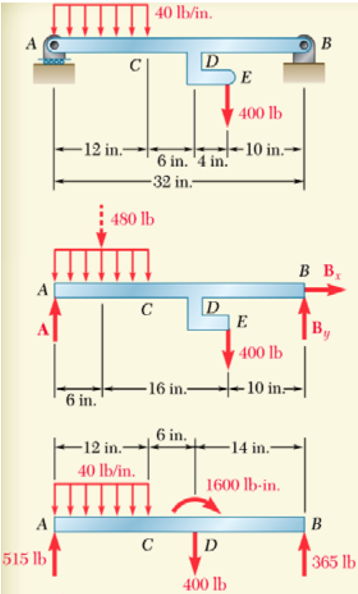
$V_1 = -20$ kN	$M_1 = 0$
$V_2 = -20$ kN	$M_2 = -50$ kN · m
$V_3 = +26$ kN	$M_3 = -50$ kN · m
$V_4 = +26$ kN	$M_4 = +28$ kN · m
$V_5 = -14$ kN	$M_5 = +28$ kN · m
$V_6 = -14$ kN	$M_6 = 0$

مثال 3:

بر اساس روش برش، نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده مقابل ، ترسیم نمایید.



حل مثال 3:



$$\sum M_A = 0:$$

$$B_y(32\,\text{in.}) - (480\,\text{lb})(6\,\text{in.}) - (400\,\text{lb})(22\,\text{in.}) = 0$$

$$\boxed{B_y = 365\,\text{lb}}$$

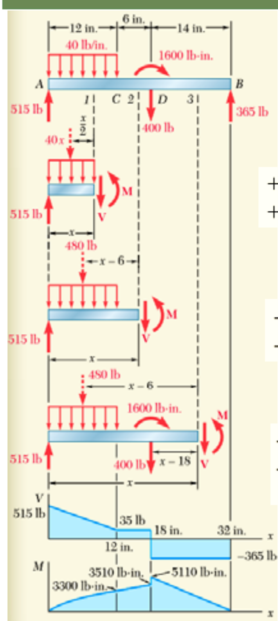
$$\sum M_B = 0:$$

$$(480\,\text{lb})(26\,\text{in.}) + (400\,\text{lb})(10\,\text{in.}) - A(32\,\text{in.}) = 0$$

$$\boxed{A = 515\,\text{lb}}$$

$$\sum F_x = 0: \qquad \boxed{B_x = 0}$$

ادامه حل مثال 3:



$0 < x < 12$ in.

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\quad 515 - 40x - V = 0 \qquad V = 515 - 40x$

$+\circlearrowleft \Sigma M_1 = 0$: $\quad -515x + 40x(\tfrac{1}{2}x) + M = 0 \qquad M = 515x - 20x^2$

18 in. $< x < 32$ in.

$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\quad 515 - 480 - V = 0 V = 35$ lb

$+\circlearrowleft \Sigma M_2 = 0$: $\quad -515x + 480(x - 6) + M = 0 \qquad M = (2880 + 35x)$ lb · in.

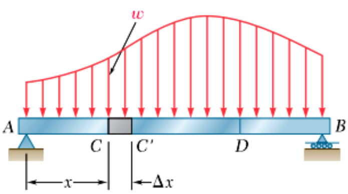
18 in. $< x < 32$ in.

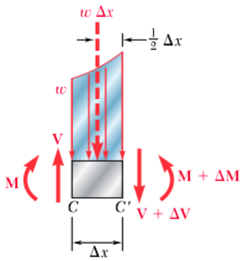
$+\uparrow \Sigma F_y = 0$: $\quad 515 - 480 - 400 - V = 0 \qquad V = -365$ lb

$+\circlearrowleft \Sigma M_3 = 0$: $\quad -515x + 480(x - 6) - 1600 + 400(x - 18) + M = 0$

$M = (11{,}680 - 365x)$ lb · in.

ارتباط بین بار، نیروی برشی و گشتاور خمشی





- Relations between load and shear:

$$V-(V+\Delta V)-w\Delta x=0$$

$$\frac{dV}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta x}=-w$$

$$V_D-V_C=-\int_{x_C}^{x_D} w\,dx=-(\text{area under load curve})$$

- Relations between shear and bending moment:

$$(M+\Delta M)-M-V\Delta x+w\Delta x\frac{\Delta x}{2}=0$$

$$\frac{dM}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta M}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(V-\tfrac{1}{2}w\Delta x\right)=V$$

$$M_D-M_C=\int_{x_C}^{x_D} V\,dx=(\text{area under shear curve})$$

2- روش سطح زیر منحنی برای ترسیم نمودار V و M (روش جمع زنی)

در روش جمع زنی مراحل زیر (جهت ترسیم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی) انجام می شود:

۱– تعیین نیروی عکس العمل تکیه‌گاهی و ترسیم نمودار برش. مجموع نیروها در جهت قائم (در طول) برابر صفر است.

۲– ترسیم نمودار گشتاور خمشی بر اساس سطح زیر منحنی نیروی برشی و گشتاورهای متمرکز اعمالی به تیر.

۳– در صورت نیاز، استفاده از روابط بین بار، برش و گشتاور .

$$w=-\frac{dV}{dx}$$

$$\int_{V_0}^{V} dV=-\int_{x_0}^{x} w\,dx$$

$V = V_0 +$ (the negative of the area under the loading curve from x_0 to x)

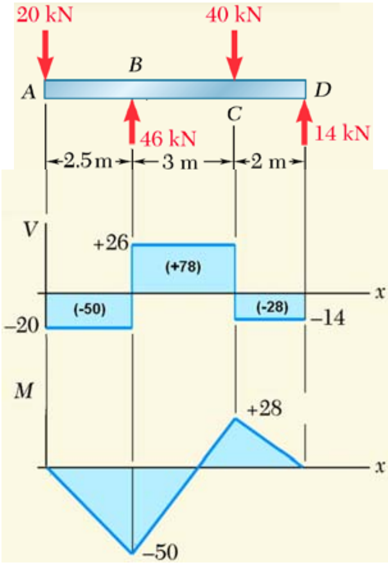
$$V=\frac{dM}{dx}$$

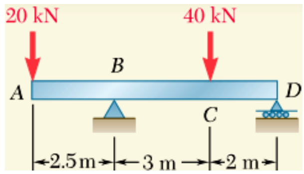
$$\int_{M_0}^{M} dM=\int_{x_0}^{x} V\,dx$$

$M = M_0 +$ (area under the shear diagram from x_0 to x)

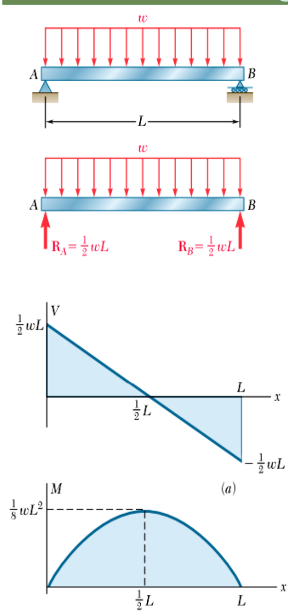
مثال 2 با روش جمع زنی:

بر اساس روش جمع زنی، نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده مقابل ، ترسیم نمایید.





Relations Among Load, Shear, and Bending Moment



- Reactions at supports, $R_A = R_B = \dfrac{wL}{2}$

- Shear curve,

$$V - V_A = -\int_0^x w\,dx = -wx$$

$$V = V_A - wx = \frac{wL}{2} - wx = w\left(\frac{L}{2} - x\right)$$

- Moment curve,

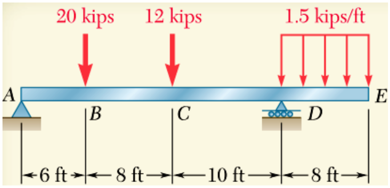
$$M - M_A = \int_0^x V dx$$

$$M = \int_0^x w\left(\frac{L}{2} - x\right)dx = \frac{w}{2}\left(Lx - x^2\right)$$

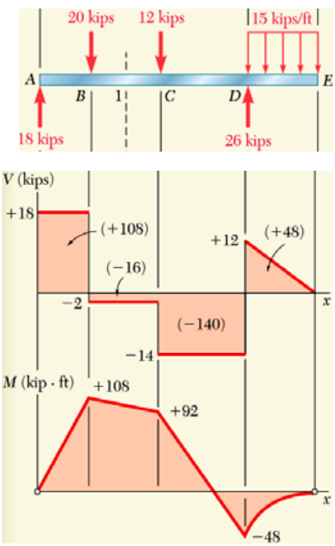
$$M_{\max} = \frac{wL^2}{8} \quad \left(M \text{ at } \frac{dM}{dx} = V = 0\right)$$

مثال 4با روش جمع زنی:

بر اساس روش جمع زنی، نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی را برای تیر بارگذاری شده مقابل ، ترسیم نمایید.



حل مثال 4:



$\sum M_A = 0:$

$$D(24\text{ ft}) - (20\text{ kips})(6\text{ ft}) - (12\text{ kips})(14\text{ ft}) - (12\text{ kips})(28\text{ ft}) = 0$$

$$\boxed{D = 26\text{ kips}}$$

$\sum F_y = 0:$

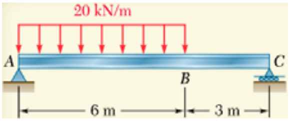
$$A_y - 20\text{ kips} - 12\text{ kips} + 26\text{ kips} - 12\text{ kips} = 0$$

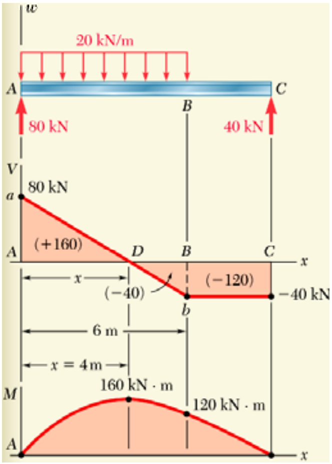
$$\boxed{A_y = 18\text{ kips}}$$

- Between concentrated load application points, $dV/dx = -w = 0$ and shear is constant.

مثال 5:

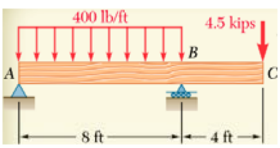
مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی برای تیر بارگذاری شده مقابل.

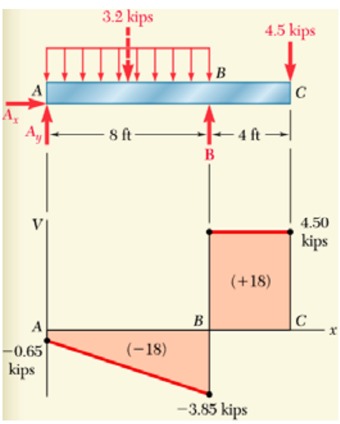




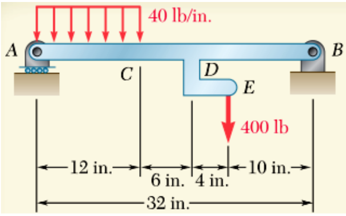
مثال 6:

مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی برای تیر بارگذاری شده مقابل.



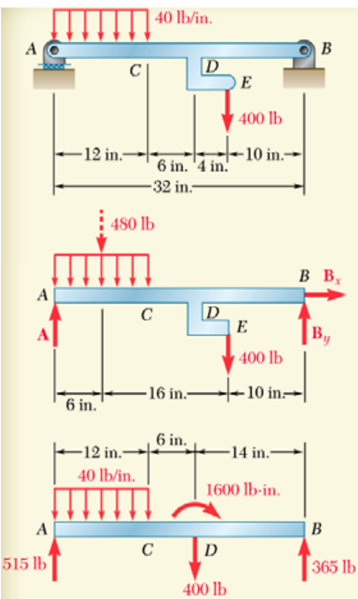


مثال 7:



مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی برای تیر بارگذاری شده مقابل.

حل مثال 7:



SOLUTION:

$\sum M_A = 0:$

$B_y(32\,\text{in.}) - (480\,\text{lb})(6\,\text{in.}) - (400\,\text{lb})(22\,\text{in.}) = 0$

$\boxed{B_y = 365\,\text{lb}}$

$\sum M_B = 0:$

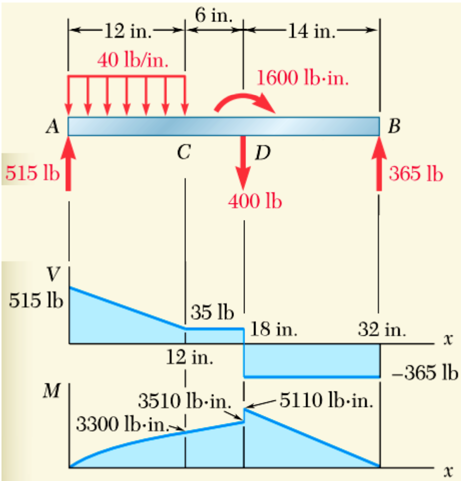
$(480\,\text{lb})(26\,\text{in.}) + (400\,\text{lb})(10\,\text{in.}) - A(32\,\text{in.}) = 0$

$\boxed{A = 515\,\text{lb}}$

$\sum F_x = 0:$ $\boxed{B_x = 0}$

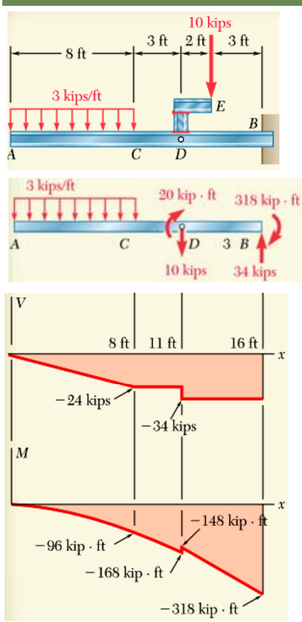
- Note: The 400 lb load at E may be replaced by a 400 lb force and 1600 lb-in. couple at D.

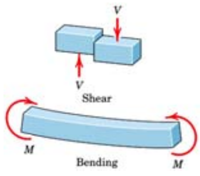
ادامه حل مثال 7:

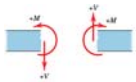


مثال 8:

مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی برای تیر بارگذاری شده مقابل.







$$\boxed{w = -\frac{dV}{dx}}$$

$$\int_{V_0}^{V} dV = -\int_{x_0}^{x} w\, dx$$

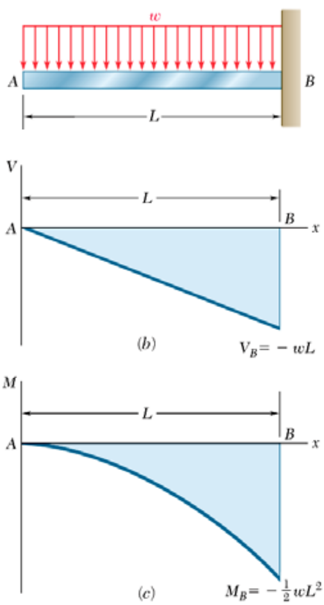
$V = V_0 +$ (the negative of the area under the loading curve from x_0 to x)

$$\boxed{V = \frac{dM}{dx}} \qquad \int_{M_0}^{M} dM = \int_{x_0}^{x} V\, dx$$

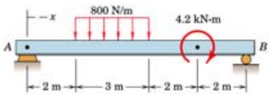
$M = M_0 +$ (area under the shear diagram from x_0 to x)

مثال 9:

مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی برای تیر بارگذاری شده مقابل.

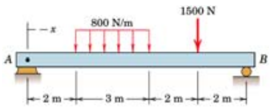


تمرین (تکلیف منزل):



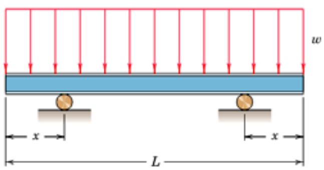
$x = 6$ m:
$V = -1400$ N, $M = 0$
$M_{max} = 2800$ N·m at $x = 3.25$ m

مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی برای تیر بارگذاری شده مقابل.



$x = 6$ m:
$V = -600$ N, $M = 4800$ N·m
$M_{max} = 5620$ N·m at $x = 4.25$ m

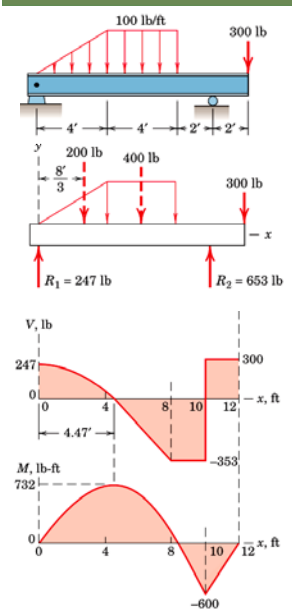
5/154 The beam supports a uniform unit load w. Determine the location x of the two supports so as to minimize the maximum bending moment M_{max} in the beam. Specify M_{max}.



‣**5/154** $x = 0.207L$, $M_{max} = 0.0214wL^2$

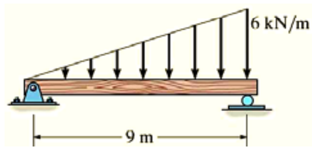
مثال 10:

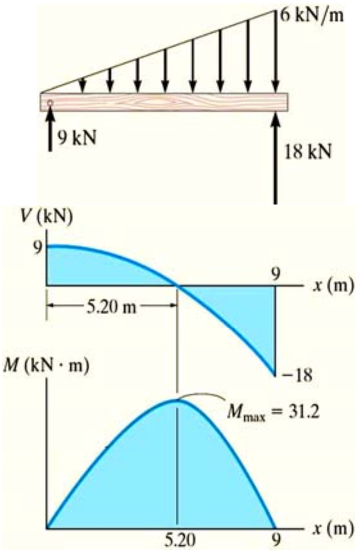
مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی برای تیر بارگذاری شده مقابل.



مثال 11:

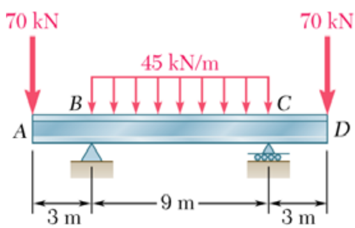
مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی برای تیر بارگذاری شده زیر.





تکلیف1

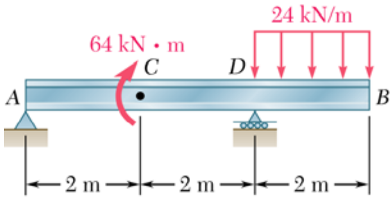
مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی برای تیر بارگذاری شده مقابل.



R_A=272.5 kN
R_D=272.5 kN
M_{max}=245.625 kN.m

تکلیف2

مطلوبست ترسیم نمودار نیروی برش و گشتاور خمشی برای تیر بارگذاری شده مقابل.



$R_A = -28\ kN$
$R_D = 76\ kN$
$M_{max} = 56\ kN.m$

Ninth Edition

CHAPTER

9

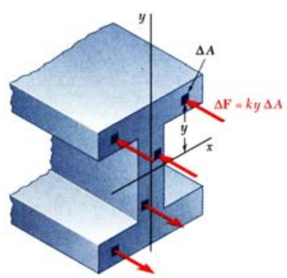
VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS:
STATICS

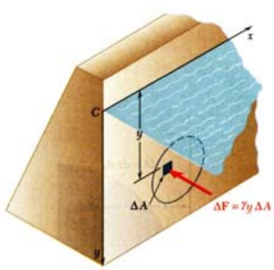
Ferdinand P. Beer
E. Russell Johnston, Jr.

Lecture Notes:
J. Walt Oler
Texas Tech University

گشتاور دوم سطح
(گشتاور لختی سطح)

گشتاور دوم سطح





- Consider distributed forces $\Delta\vec{F}$ whose magnitudes are proportional to the elemental areas ΔA on which they act and also vary linearly with the distance of ΔA from a given axis.

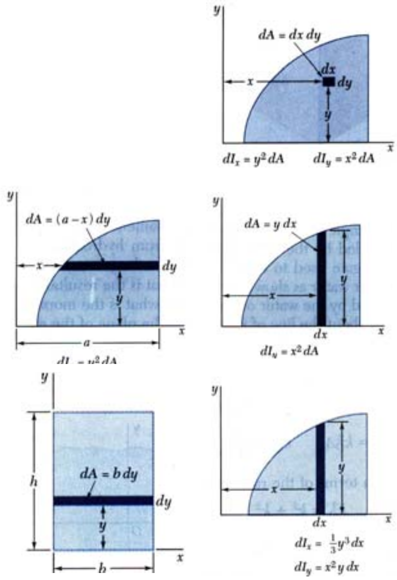
- Example: Consider a beam subjected to pure bending. Internal forces vary linearly with distance from the neutral axis which passes through the section centroid.

$$\Delta\vec{F} = ky\Delta A$$
$$R = k\int y\,dA = 0 \qquad \int y\,dA = Q_x = \text{first moment}$$
$$M = k\int y^2 dA \qquad \int y^2 dA = \text{second moment}$$

- Example: Consider the net hydrostatic force on a submerged circular gate.

$$\Delta F = p\Delta A = \gamma y\Delta A$$
$$R = \gamma\int y\,dA$$
$$M_x = \gamma\int y^2 dA$$

گشتاور دوم سطح به کمک انتگرال



- *Second moments* or *moments of inertia* of an area with respect to the x and y axes,

$$I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA$$

- Evaluation of the integrals is simplified by choosing dA to be a thin strip parallel to one of the coordinate axes.

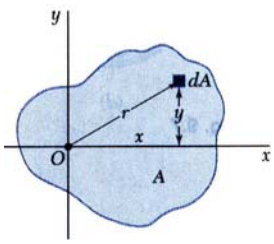
- For a rectangular area,

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = \tfrac{1}{3} b h^3$$

- The formula for rectangular areas may also be applied to strips parallel to the axes,

$$dI_x = \tfrac{1}{3} y^3 dx \qquad dI_y = x^2 dA = x^2 y\, dx$$

گشتاور لختی قطبی سطح



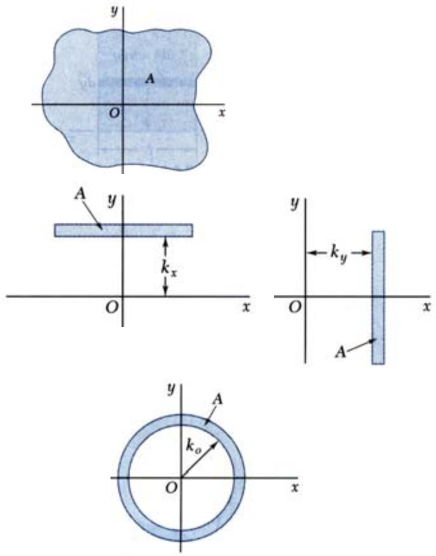
- The *polar moment of inertia* is an important parameter in problems involving torsion of cylindrical shafts and rotations of slabs.

$$J_0 = \int r^2 dA$$

- The polar moment of inertia is related to the rectangular moments of inertia,

$$J_0 = \int r^2 dA = \int \left(x^2 + y^2\right) dA = \int x^2 dA + \int y^2 dA$$
$$= I_y + I_x$$

شعاع ژیراسیون (چرخش) سطح



- Consider area A with moment of inertia I_x. Imagine that the area is concentrated in a thin strip parallel to the x axis with equivalent I_x.

$$I_x = k_x^2 A \qquad k_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

$k_x =$ *radius of gyration* with respect to the x axis

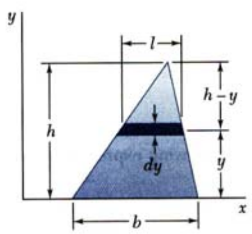
- Similarly,

$$I_y = k_y^2 A \qquad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

$$J_O = k_O^2 A \qquad k_O = \sqrt{\frac{J_O}{A}}$$

$$k_O^2 = k_x^2 + k_y^2$$

مثال نمونه1



Determine the moment of inertia of a triangle with respect to its base.

<u>SOLUTION</u>:

- A differential strip parallel to the x axis is chosen for dA.

$$dI_x = y^2 dA \qquad dA = l\,dy$$

- For similar triangles,

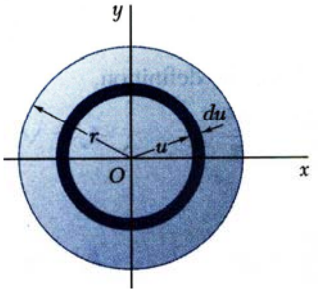
$$\frac{l}{b} = \frac{h-y}{h} \qquad l = b\frac{h-y}{h} \qquad dA = b\frac{h-y}{h}dy$$

- Integrating dI_x from $y = 0$ to $y = h$,

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b \frac{h-y}{h} dy = \frac{b}{h}\int_0^h \left(hy^2 - y^3\right) dy$$

$$= \frac{b}{h}\left[h\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^h \qquad \boxed{I_x = \frac{bh^3}{12}}$$

مثال نمونه2



a) Determine the centroidal polar moment of inertia of a circular area by direct integration.

b) Using the result of part *a*, determine the moment of inertia of a circular area with respect to a diameter.

SOLUTION:

- An annular differential area element is chosen,

$$dJ_O = u^2 dA \qquad dA = 2\pi u\, du$$

$$J_O = \int dJ_O = \int_0^r u^2 (2\pi u\, du) = 2\pi \int_0^r u^3 du$$

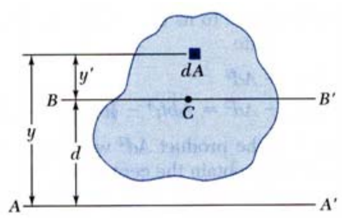
$$\boxed{J_O = \frac{\pi}{2} r^4}$$

- From symmetry, $I_x = I_y$,

$$J_O = I_x + I_y = 2I_x \qquad \frac{\pi}{2} r^4 = 2I_x$$

$$\boxed{I_{diameter} = I_x = \frac{\pi}{4} r^4}$$

قضیه محورهای موازی



- Consider moment of inertia I of an area A with respect to the axis AA'

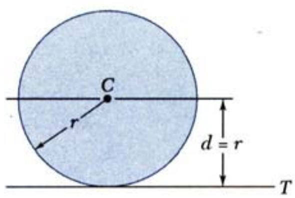
$$I = \int y^2 dA$$

- The axis BB' passes through the area centroid and is called a *centroidal axis.*

$$I = \int y^2 dA = \int (y' + d)^2 dA$$
$$= \int y'^2 dA + 2d \int y' dA + d^2 \int dA$$

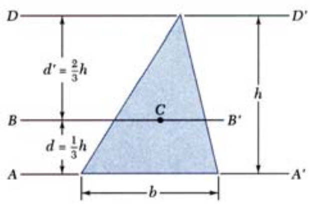
$$I = \bar{I} + Ad^2 \qquad \textit{parallel axis theorem}$$

قضیه محورهای موازی



- Moment of inertia I_T of a circular area with respect to a tangent to the circle,

$$I_T = \bar{I} + Ad^2 = \tfrac{1}{4}\pi r^4 + \left(\pi r^2\right)r^2$$
$$= \tfrac{5}{4}\pi r^4$$

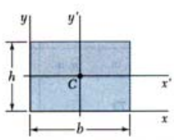
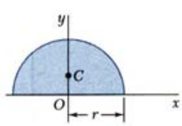
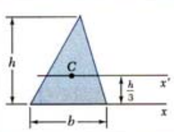
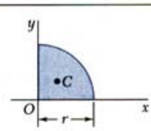
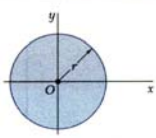
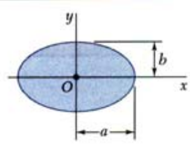


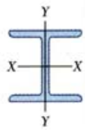
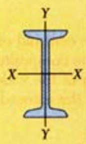
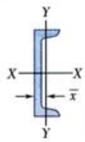
- Moment of inertia of a triangle with respect to a centroidal axis,

$$I_{AA'} = \bar{I}_{BB'} + Ad^2$$
$$I_{BB'} = I_{AA'} - Ad^2 = \tfrac{1}{12}bh^3 - \tfrac{1}{2}bh\left(\tfrac{1}{3}h\right)^2$$
$$= \tfrac{1}{36}bh^3$$

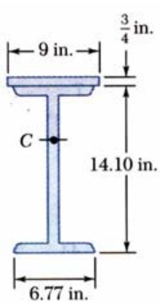
گشتاور لختی سطوح مرکب

گشتاور لختی سطح $\mathbf{A}$ نسبت به محور مفروض، با جمع گشتاور لختی سطوح $\mathbf{A_1}$ و $\mathbf{A_2}$ و $\mathbf{A_3}$ و ... نسبت به همان محور به دست می آید.

Rectangle		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{12}bh^3$ $\bar{I}_{y'} = \frac{1}{12}b^3h$ $I_x = \frac{1}{3}bh^3$ $I_y = \frac{1}{3}b^3h$ $J_C = \frac{1}{12}bh(b^2 + h^2)$	Semicircle		$I_x = I_y = \frac{1}{8}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{4}\pi r^4$
Triangle		$\bar{I}_{x'} = \frac{1}{36}bh^3$ $I_x = \frac{1}{12}bh^3$	Quarter circle		$I_x = I_y = \frac{1}{16}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{8}\pi r^4$
Circle		$\bar{I}_x = \bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi r^4$ $J_O = \frac{1}{2}\pi r^4$	Ellipse		$\bar{I}_x = \frac{1}{4}\pi ab^3$ $\bar{I}_y = \frac{1}{4}\pi a^3b$ $J_O = \frac{1}{4}\pi ab(a^2 + b^2)$

		Designation	Area mm^2	Depth mm	Width mm	Axis X-X $\bar{I}_x$ 10^6 mm^4	$\bar{k}_x$ mm	$\bar{y}$ mm	Axis Y-Y $\bar{I}_y$ 10^6 mm^4	$\bar{k}_y$ mm	$\bar{x}$ mm
W Shapes (Wide-Flange Shapes)		W460 × 113†	14400	463	280	554	196.3		63.3	66.3	
		W410 × 85	10800	417	181	316	170.7		17.94	40.6	
		W360 × 57	7230	358	172	160.2	149.4		11.11	39.4	
		W200 × 46.1	5890	203	203	45.8	88.1		15.44	51.3	
S Shapes (American Standard Shapes)		S460 × 81.4†	10390	457	152	335	179.6		8.66	29.0	
		S310 × 47.3	6032	305	127	90.7	122.7		3.90	25.4	
		S250 × 37.8	4806	254	118	51.6	103.4		2.83	24.2	
		S150 × 18.6	2362	152	84	9.2	62.2		0.758	17.91	
C Shapes (American Standard Channels)		C310 × 30.8†	3929	305	74	53.7	117.1		1.615	20.29	17.73
		C250 × 22.8	2897	254	65	28.1	98.3		0.949	18.11	16.10
		C200 × 17.1	2181	203	57	13.57	79.0		0.549	15.88	14.50
		C150 × 12.2	1548	152	48	5.45	59.4		0.288	13.64	13.00

مثال نمونه از سطوح مرکب

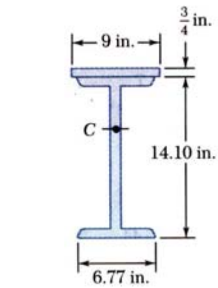


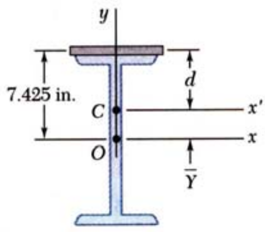
The strength of a W14x38 rolled steel beam is increased by attaching a plate to its upper flange.

Determine the moment of inertia and radius of gyration with respect to an axis which is parallel to the plate and passes through the centroid of the section.

SOLUTION:

- Determine location of the centroid of composite section with respect to a coordinate system with origin at the centroid of the beam section.
- Apply the parallel axis theorem to determine moments of inertia of beam section and plate with respect to composite section centroidal axis.
- Calculate the radius of gyration from the moment of inertia of the composite section.



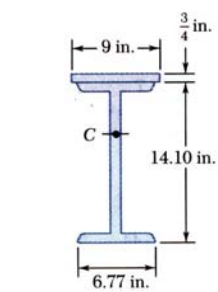


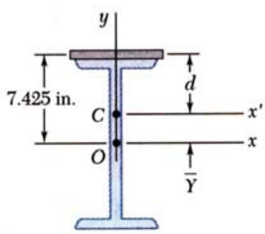
SOLUTION:

- Determine location of the centroid of composite section with respect to a coordinate system with origin at the centroid of the beam section.

Section	A, in^2	$\bar{y}$, in.	$\bar{y}A$, in^3
Plate	6.75	7.425	50.12
Beam Section	11.20	0	0
	$\sum A = 17.95$		$\sum \bar{y}A = 50.12$

$$\bar{Y}\sum A = \sum \bar{y}A \qquad \bar{Y} = \frac{\sum \bar{y}A}{\sum A} = \frac{50.12\,\text{in}^3}{17.95\,\text{in}^2} = 2.792\,\text{in.}$$





- Apply the parallel axis theorem to determine moments of inertia of beam section and plate with respect to composite section centroidal axis.

$$I_{x',\text{beam section}} = \bar{I}_x + A\bar{Y}^2 = 385 + (11.20)(2.792)^2$$
$$= 472.3\,\text{in}^4$$

$$I_{x',\text{plate}} = \bar{I}_x + Ad^2 = \tfrac{1}{12}(9)\left(\tfrac{3}{4}\right)^3 + (6.75)(7.425 - 2.792)^2$$
$$= 145.2\,\text{in}^4$$

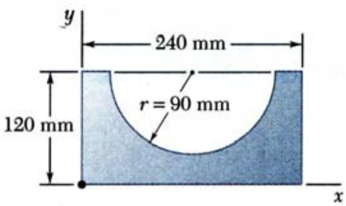
$$I_{x'} = I_{x',\text{beam section}} + I_{x',\text{plate}} = 472.3 + 145.2$$

$$\boxed{I_{x'} = 618\,\text{in}^4}$$

- Calculate the radius of gyration from the moment of inertia of the composite section.

$$k_{x'} = \sqrt{\frac{I_{x'}}{A}} = \frac{617.5\,\text{in}^4}{17.95\,\text{in}^2} \qquad \boxed{k_{x'} = 5.87\,\text{in.}}$$

مثال 2

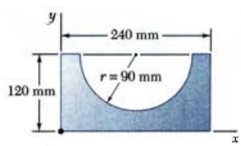


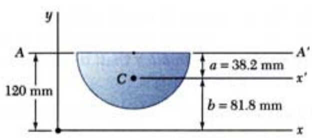
Determine the moment of inertia of the shaded area with respect to the x axis.

SOLUTION:

- Compute the moments of inertia of the bounding rectangle and half-circle with respect to the x axis.
- The moment of inertia of the shaded area is obtained by subtracting the moment of inertia of the half-circle from the moment of inertia of the rectangle.

حل مثال 2





$$a = \frac{4r}{3\pi} = \frac{(4)(90)}{3\pi} = 38.2 \text{ mm}$$

$$b = 120 - a = 81.8 \text{ mm}$$

$$A = \tfrac{1}{2}\pi r^2 = \tfrac{1}{2}\pi(90)^2$$
$$= 12.72\times10^3 \text{mm}^2$$

SOLUTION:

- Compute the moments of inertia of the bounding rectangle and half-circle with respect to the x axis.

Rectangle:

$$I_x = \tfrac{1}{3}bh^3 = \tfrac{1}{3}(240)(120) = 138.2\times10^6 \text{mm}^4$$

Half-circle:

moment of inertia with respect to AA',

$$I_{AA'} = \tfrac{1}{8}\pi r^4 = \tfrac{1}{8}\pi(90)^4 = 25.76\times10^6 \text{mm}^4$$

moment of inertia with respect to x',

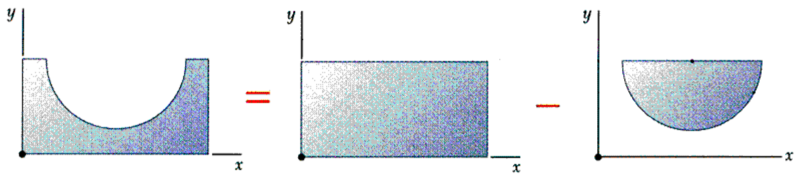
$$\bar{I}_{x'} = I_{AA'} - Aa^2 = \left(25.76\times10^6\right)\left(12.72\times10^3\right)$$
$$= 7.20\times10^6 \text{mm}^4$$

moment of inertia with respect to x,

$$I_x = \bar{I}_{x'} + Ab^2 = 7.20\times10^6 + \left(12.72\times10^3\right)(81.8)^2$$
$$= 92.3\times10^6 \text{mm}^4$$

ادامه حل مثال 2

- The moment of inertia of the shaded area is obtained by subtracting the moment of inertia of the half-circle from the moment of inertia of the rectangle.

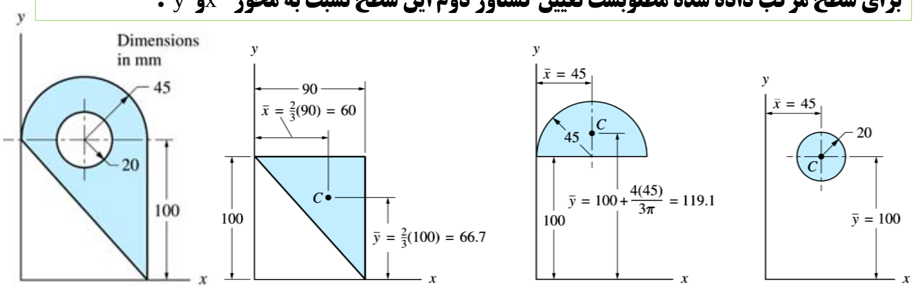


$$I_x = 138.2\times10^6\,\text{mm}^4 - 92.3\times10^6\,\text{mm}^4$$

$$\boxed{I_x = 45.9\times10^6\,\text{mm}^4}$$

مثال 3

برای سطح مرکب داده شده مطلوبست تعیین گشتاور دوم این سطح نسبت به محور x و y .



Triangle

$$A = \frac{bh}{2} = \frac{90(100)}{2} = 4500\ \text{mm}^2$$

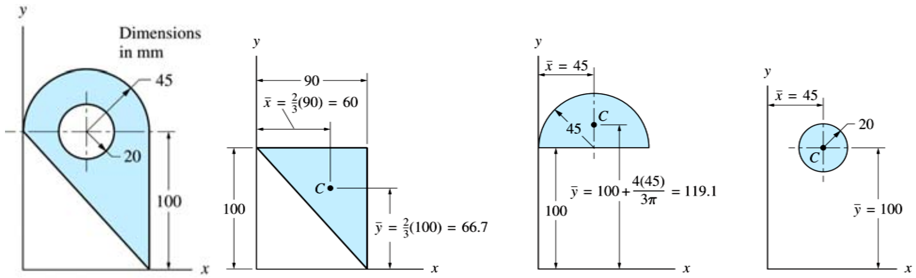
$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{36} = \frac{90(100)^3}{36} = 2.50\times10^6\ \text{mm}^4$$

$$I_x = \bar{I}_x + A\bar{y}^2 = (2.50\times10^6) + (4500)(66.7)^2 = 22.52\times10^6\ \text{mm}^4$$

$$\bar{I}_y = \frac{hb^3}{36} = \frac{100(90)^3}{36} = 2.025\times10^6\ \text{mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + A\bar{x}^2 = (2.025\times10^6) + (4500)(60)^2 = 18.23\times10^6\ \text{mm}^4$$

حل مثال 3



Semicircle

$$A = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi (45)^2}{2} = 3181 \text{ mm}^2$$

$$\bar{I}_x = 0.1098 R^4 = 0.1098(45)^4 = 0.450 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

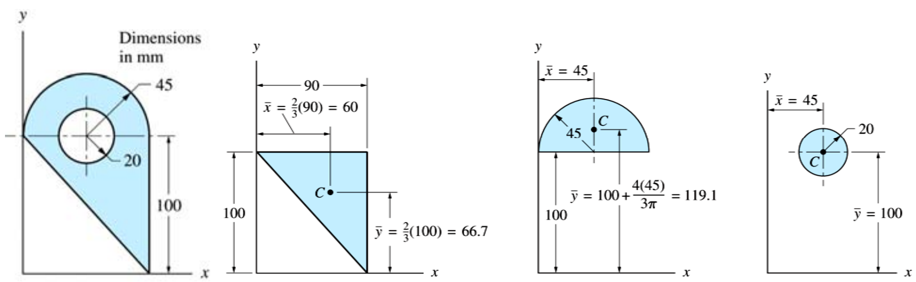
$$I_x = \bar{I}_x + A\bar{y}^2 = (0.450 \times 10^6) + (3181)(119.1)^2 = 45.57 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}_y = \frac{\pi R^4}{8} = \frac{\pi (45)^4}{8} = 1.61 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + A\bar{x}^2 = (1.61 \times 10^6) + (3181)(45)^2 = 8.05 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

2 - 19

ادامه حل مثال 3



Circle

$$A = \pi R^2 = \pi (20)^2 = 1257 \text{ mm}^2$$

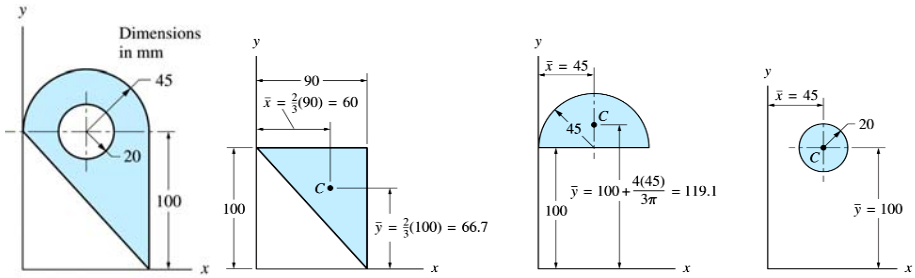
$$\bar{I}_x = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi (20)^4}{4} = 0.1257 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_x = \bar{I}_x + A\bar{y}^2 = (0.1257 \times 10^6) + (1257)(100)^2 = 12.70 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$\bar{I}_y = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi (20)^4}{4} = 0.1257 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$I_y = \bar{I}_y + A\bar{x}^2 = (0.1257 \times 10^6) + (1257)(45)^2 = 2.67 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

ادامه حل مثال 3

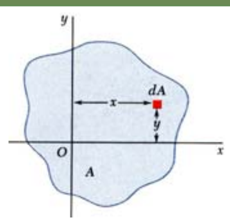


$$A = \Sigma A = 4500 + 3181 - 1257 = 6424 \text{ mm}^2$$

$$I_x = \Sigma I_x = (22.52 + 45.57 - 12.70) \times 10^6 = 55.39 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

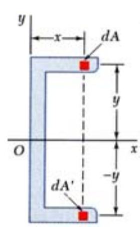
$$I_y = \Sigma I_y = (18.23 + 8.05 - 2.67) \times 10^6 = 23.61 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

حاصل ضرب لختی

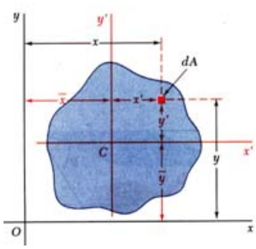


- *Product of Inertia:*

$$I_{xy} = \int xy\, dA$$



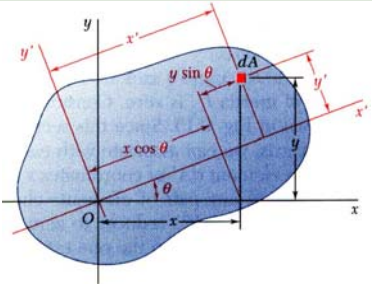
- When the x axis, the y axis, or both are an axis of symmetry, the product of inertia is zero.



- Parallel axis theorem for products of inertia:

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + \bar{x}\bar{y}A$$

محورهای اصلی و گشتاورهای لختی اصلی سطح



Given $I_x = \int y^2 dA \quad I_y = \int x^2 dA$

$I_{xy} = \int xy\, dA$

we wish to determine moments and product of inertia with respect to new axes *x'* and *y'*.

Note: $x' = x\cos\theta + y\sin\theta$

$y' = y\cos\theta - x\sin\theta$

- The change of axes yields

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta$$

$$I_{x'y'} = \frac{I_x - I_y}{2}\sin 2\theta + I_{xy}\cos 2\theta$$

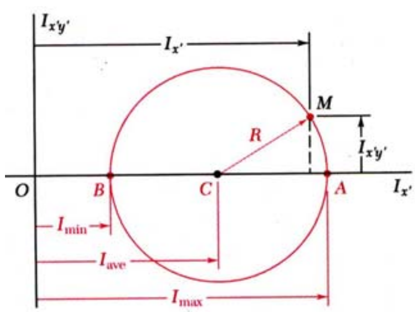
- The equations for $I_{x'}$ and $I_{x'y'}$ are the parametric equations for a circle,

$$(I_{x'} - I_{ave})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2$$

$$I_{ave} = \frac{I_x + I_y}{2} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) + I_{xy}^2}$$

- The equations for $I_{y'}$ and $I_{x'y'}$ lead to the same circle.

محورهای اصلی و گشتاورهای لختی اصلی سطح



$$(I_{x'} - I_{ave})^2 + I_{x'y'}^2 = R^2$$

$$I_{ave} = \frac{I_x + I_y}{2} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) + I_{xy}^2}$$

- At the points *A* and *B*, $I_{x'y'} = 0$ and $I_{x'}$ is a maximum and minimum, respectively.

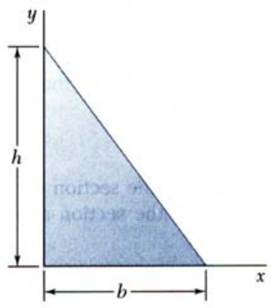
$$I_{\max,\min} = I_{ave} \pm R$$

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

- The equation for Θ_m defines two angles, 90º apart which correspond to the *principal axes* of the area about *O*.

- I_{max} and I_{min} are the *principal moments of inertia* of the area about *O*.

مثال از حاصلضرب لختی

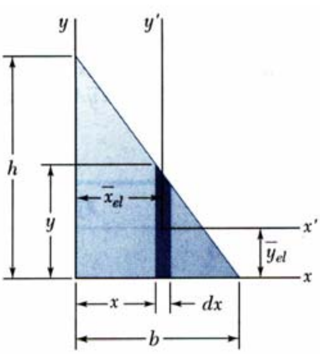


Determine the product of inertia of the right triangle *(a)* with respect to the *x* and *y* axes and
(b) with respect to centroidal axes parallel to the *x* and *y* axes.

SOLUTION:

- Determine the product of inertia using direct integration with the parallel axis theorem on vertical differential area strips
- Apply the parallel axis theorem to evaluate the product of inertia with respect to the centroidal axes.

حل



SOLUTION:

- Determine the product of inertia using direct integration with the parallel axis theorem on vertical differential area strips

$$y = h\left(1-\frac{x}{b}\right) \qquad dA = y\,dx = h\left(1-\frac{x}{b}\right)dx$$

$$\bar{x}_{el} = x \qquad \bar{y}_{el} = \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}h\left(1-\frac{x}{b}\right)$$

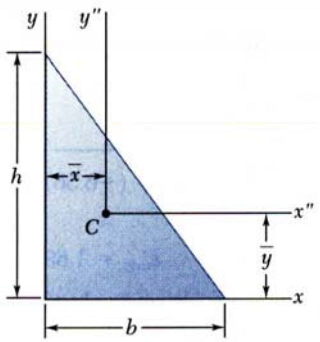
Integrating dI_x from $x = 0$ to $x = b$,

$$I_{xy} = \int dI_{xy} = \int \bar{x}_{el}\bar{y}_{el}\,dA = \int_0^b x\left(\tfrac{1}{2}\right)h^2\left(1-\frac{x}{b}\right)^2 dx$$

$$= h^2\int_0^b\left(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{b}+\frac{x^3}{2b^2}\right)dx = h^2\left[\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{3b}+\frac{x^4}{8b^2}\right]_0^b$$

$$\boxed{I_{xy} = \tfrac{1}{24}b^2h^2}$$

ادامه حل



- Apply the parallel axis theorem to evaluate the product of inertia with respect to the centroidal axes.

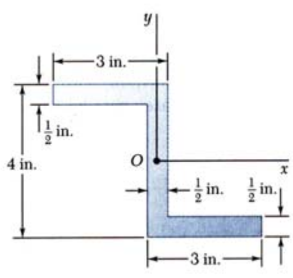
$$\bar{x} = \tfrac{1}{3}b \qquad \bar{y} = \tfrac{1}{3}h$$

With the results from part *a*,

$$I_{xy} = \bar{I}_{x''y''} + \bar{x}\bar{y}A$$
$$\bar{I}_{x''y''} = \tfrac{1}{24}b^2h^2 - \left(\tfrac{1}{3}b\right)\left(\tfrac{1}{3}h\right)\left(\tfrac{1}{2}bh\right)$$

$$\boxed{\bar{I}_{x''y''} = -\tfrac{1}{72}b^2h^2}$$

مثال از محورهای اصلی و گشتاورهای لختی اصلی



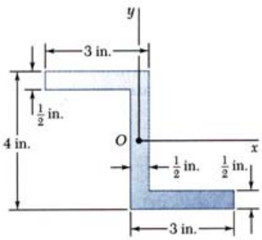
For the section shown, the moments of inertia with respect to the x and y axes are $I_x = 10.38\ \text{in}^4$ and $I_y = 6.97\ \text{in}^4$.

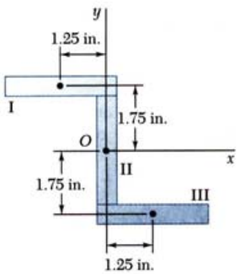
Determine *(a)* the orientation of the principal axes of the section about *O*, and *(b)* the values of the principal moments of inertia about *O*.

<u>SOLUTION</u>:

- Compute the product of inertia with respect to the *xy* axes by dividing the section into three rectangles and applying the parallel axis theorem to each.
- Determine the orientation of the principal axes (Eq. 9.25) and the principal moments of inertia (Eq. 9. 27).

حل





SOLUTION:

- Compute the product of inertia with respect to the *xy* axes by dividing the section into three rectangles.

  Apply the parallel axis theorem to each rectangle,

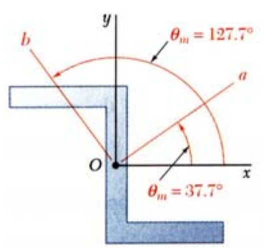
  $$I_{xy} = \sum\left(\bar{I}_{x'y'} + \bar{x}\bar{y}A\right)$$

  Note that the product of inertia with respect to centroidal axes parallel to the *xy* axes is zero for each rectangle.

Rectangle	Area, in^2	$\bar{x}$, in.	$\bar{y}$, in.	$\bar{x}\bar{y}A$, in^4
I	1.5	-1.25	$+1.75$	-3.28
II	1.5	0	0	0
III	1.5	$+1.25$	-1.75	-3.28
				$\sum \bar{x}\bar{y}A = -6.56$

$$\boxed{I_{xy} = \sum \bar{x}\bar{y}A = -6.56\,\text{in}^4}$$

ادامه حل



$I_x = 10.38\,\text{in}^4$

$I_y = 6.97\,\text{in}^4$

$I_{xy} = -6.56\,\text{in}^4$

- Determine the orientation of the principal axes (Eq. 9.25) and the principal moments of inertia (Eq. 9. 27).

$$\tan 2\theta_m = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y} = -\frac{2(-6.56)}{10.38 - 6.97} = +3.85$$

$$2\theta_m = 75.4° \text{ and } 255.4°$$

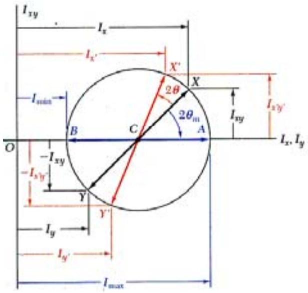
$$\boxed{\theta_m = 37.7° \text{ and } \theta_m = 127.7°}$$

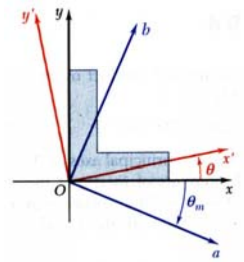
$$I_{\max,\min} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2}$$

$$= \frac{10.38 + 6.97}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10.38 - 6.97}{2}\right)^2 + (-6.56)^2}$$

$$\boxed{\begin{aligned} I_a &= I_{\max} = 15.45\,\text{in}^4 \\ I_b &= I_{\min} = 1.897\,\text{in}^4 \end{aligned}}$$

دایره مور برای گشتاورها و حاصل ضربهای لختی



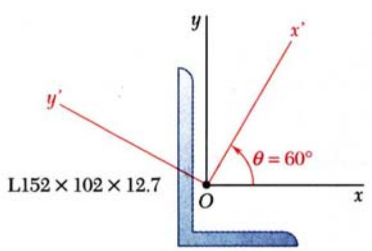


- The moments and product of inertia for an area are plotted as shown and used to construct *Mohr's circle,*

$$I_{ave} = \frac{I_x + I_y}{2} \qquad R = \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right) + I_{xy}^2}$$

- Mohr's circle may be used to graphically or analytically determine the moments and product of inertia for any other rectangular axes including the principal axes and principal moments and products of inertia.

مثال از دایره مور



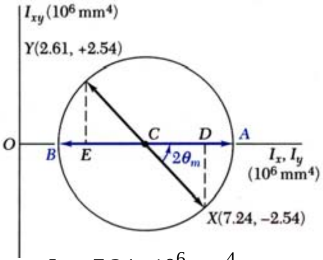
The moments and product of inertia with respect to the *x* and *y* axes are I_x = 7.24x106 mm^4, I_y = 2.61x106 mm^4, and I_{xy} = -2.54x10^6 mm^4.

Using Mohr's circle, determine *(a)* the principal axes about *O*, *(b)* the values of the principal moments about *O*, and *(c)* the values of the moments and product of inertia about the *x'* and *y'* axes

SOLUTION:

- Plot the points (I_x , I_{xy}) and (I_y ,-I_{xy}). Construct Mohr's circle based on the circle diameter between the points.
- Based on the circle, determine the orientation of the principal axes and the principal moments of inertia.
- Based on the circle, evaluate the moments and product of inertia with respect to the *x'y'* axes.

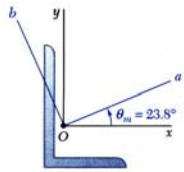
حل



$$I_x = 7.24 \times 10^6 \, \text{mm}^4$$

$$I_y = 2.61 \times 10^6 \, \text{mm}^4$$

$$I_{xy} = -2.54 \times 10^6 \, \text{mm}^4$$



SOLUTION:

- Plot the points (I_x, I_{xy}) and (I_y,-I_{xy}). Construct Mohr's circle based on the circle diameter between the points.

$$OC = I_{ave} = \tfrac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) = 4.925 \times 10^6 \, \text{mm}^4$$

$$CD = \tfrac{1}{2}\left(I_x - I_y\right) = 2.315 \times 10^6 \, \text{mm}^4$$

$$R = \sqrt{(CD)^2 + (DX)^2} = 3.437 \times 10^6 \, \text{mm}^4$$

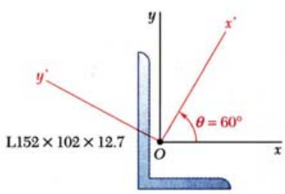
- Based on the circle, determine the orientation of the principal axes and the principal moments of inertia.

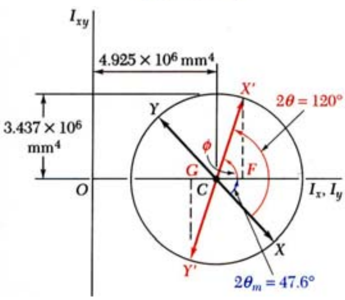
$$\tan 2\theta_m = \frac{DX}{CD} = 1.097 \qquad 2\theta_m = 47.6° \qquad \boxed{\theta_m = 23.8°}$$

$$I_{\max} = OA = I_{ave} + R \qquad \boxed{I_{\max} = 8.36 \times 10^6 \, \text{mm}^4}$$

$$I_{\min} = OB = I_{ave} - R \qquad \boxed{I_{\min} = 1.49 \times 10^6 \, \text{mm}^4}$$

ادامه حل





$$OC = I_{ave} = 4.925 \times 10^6 \, \text{mm}^4$$

$$R = 3.437 \times 10^6 \, \text{mm}^4$$

- Based on the circle, evaluate the moments and product of inertia with respect to the *x'y'* axes.

The points *X'* and *Y'* corresponding to the *x'* and *y'* axes are obtained by rotating *CX* and *CY* counterclockwise through an angle $\Theta = 2(60^o) = 120^o$. The angle that *CX'* forms with the *x'* axes is $\phi = 120^o - 47.6^o = 72.4^o$.

$$I_{x'} = OF = OC + CX' \cos\varphi = I_{ave} + R\cos 72.4^o$$

$$\boxed{I_{x'} = 5.96 \times 10^6 \, \text{mm}^4}$$

$$I_{y'} = OG = OC - CY' \cos\varphi = I_{ave} - R\cos 72.4^o$$

$$\boxed{I_{y'} = 3.89 \times 10^6 \, \text{mm}^4}$$

$$I_{x'y'} = FX' = CY' \sin\varphi = R\sin 72.4^o$$

$$\boxed{I_{x'y'} = 3.28 \times 10^6 \, \text{mm}^4}$$