

بسمه تعالی



معادلات دیفرانسیل

جلد اول



هنری پوانکاره

موسوی دانشگاه فنی حرفه ای شیراز

معادله دیفرانسیل چیست؟

مثال ۱: نوع معادلات زیر را مشخص کنید.

۱) $5yx^2 + y^3e^x - 4 = 0$

۲) $x^2 y''' - 4xe^y + 1 = 0$

۳) $y^2 + x \int_0^x y(t) dt - 4 = 0$

در این بخش از آموزش ریاضیات به مبحث آموزشی معادلات دیفرانسیل می پردازیم:

هر معادله که شامل یک متغیر x ، تابع آن متغیر y و مشتقات تابع نسبت به متغیر تابع $(y^{(n)}, \dots, y', y)$ باشد به یک معادله دیفرانسیل معمولی موسوم است. برای مثال معادله زیر یک معادله دیفرانسیل می باشد:

$$y' - 3x = 0$$

لزومی ندارد که در یک معادله دیفرانسیل کلیه ی پارامترهای ذکر شده موجود باشد، فقط وجود مشتق یا مشتقات تابع در معادله ضروری می باشد.

معادله دیفرانسیل، رابطه‌ای میان تابع، مشتقات آن و متغیرهای مستقلش است. بنابراین ما خواهیم توانست، انواع محاسبات را انجام دهیم، از هر پدیده‌ای نموداری به منظور توصیف آن تهیه کنیم و حتی قادر خواهیم بود آینده را پیش بینی کنیم!

$$y + \frac{dy}{dx} = 5x$$

نمونه‌ای از یک معادله دیفرانسیل که شامل تابع y و مشتقش است.

حل:

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \frac{dy}{dx} + y = 4x^5$$

. ثابت کنید تابع $y = \sin x$ ، یک جواب معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ است؟

حل شدن یک معادله دیفرانسیل به چه معناست؟

زمانی یک معادله دیفرانسیل حل شده است که تابع y بر حسب متغیرهای وابسته‌اش پیدا شده باشد. به طور دقیق‌تر، یعنی اینکه بدانیم مثلاً y که تابعی از متغیر x در نظر گرفته شده، طبق کدام رابطه توصیف می‌شود. روش‌های متفاوتی به منظور حل یک معادله دیفرانسیل وجود دارند، اما در ابتدا بایستی بدانیم که چرا معادلات دیفرانسیل مهم هستند.

$$\text{الف) } y' + y = 0, \quad y = e^{-x}$$



$$\text{داریم: } y = e^{-x}, \quad y' = -e^{-x}$$

در نتیجه با جایگذاری داریم:

$$y' + y = e^{-x} - e^{-x} = 0$$

$$\text{پ) } f'(x) = f''(x), \quad y = e^x + 2$$



$$y' = y'' \Rightarrow y'' = e^x \quad \text{و} \quad y' = e^x \Rightarrow y = e^x + 2$$

حل :

حل

$$(y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x \Rightarrow y'' = -\sin x) \xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله}} y'' + y = -\sin x + \sin x = 0$$

پس $y = \sin x$ در معادله دیفرانسیل $y'' + y = 0$ صدق می‌کند.

دوصفحه بعدی بیشتر جهت تثبیت مطالب بالاست میتوانید از آنها صرف نظر کنید

برای مثال تابع $y = L_n x$ در بازه $(0, +\infty)$ جواب معادله ی دیفرانسیل $xy'' + y' = 0$ می باشد. زیرا

$$y = L_n x \rightarrow y' = \frac{1}{x} \rightarrow y'' = -\frac{1}{x^2}$$

$$xy'' + y' = x\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 0.$$

تمرین: نشان دهید که تابع $y = e^{2x}$ تعریف شده در R جواب برای معادله ی دیفرانسیل $y'' - y' - 2y = 0$ می باشد.

حل :

$$y = e^{2x} \rightarrow y' = 2e^{2x} \rightarrow y'' = 4e^{2x}$$

$$y'' - y' - 2y = 4e^{2x} - 2e^{2x} - 2e^{2x} = 0.$$

تمرین: نشان دهید که تابع $y = \cos x$ تعریف شده در R جواب برای معادله ی دیفرانسیل $y''' + y'' + y' + y = 0$ می باشد.

می باشد.

حل :

$$y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x \rightarrow y'' = -\cos x \rightarrow y''' = \sin x$$

$$y''' + y'' + y' + y = \sin x + (-\cos x) + (-\sin x) + (\cos x) = 0.$$

تمرین برای حل :

۱ : در هر مورد مرتبه ی معادله ی دیفرانسیل داده شده را تعیین کنید.

الف) $e^x y - 3xy''' = 4y'$

ب) $6y'' - 2y' + 4x^2 = 5y$

ج) $y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^5 = 3x \frac{d^2 y}{dx^2}$

۲ : در هر مورد نشان دهید که تابع داده شده جواب معادله ی دیفرانسیل است.

الف) $y''' + y'' + y' + y = 0$, $y = \sin x$

ب) $\frac{d^2 y}{dx^2} + 9y = 5 \cos 2x$, $y = \cos 2x + 2 \cos 3x$

ج) $4x^2 y^2 dx = -dy$, $y = \frac{1}{2 - x^4}$

تعریف : جواب معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی n -ام که شامل n ثابت دلخواه مانند $c_1, c_2, \dots, c_n$ باشد را **جواب عمومی** معادله ی دیفرانسیل می نامند. اگر جواب معادله ی دیفرانسیل شامل ثابت دلخواه نباشد، آن را **جواب اختصاصی** می گویند.

مثال: تابع $y = ce^{2x}$ یک جواب عمومی معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول $y' - 2y = 0$ است.

توجه : اگر در جواب عمومی معادله ی دیفرانسیل به جای c عدد دلخواه قرار دهیم، یک جواب اختصاصی معادله بدست می آید.

برای مثال در تابع $y = ce^{2x}$ اگر $c = 3$ اختیار کنیم، تابع $y = 3e^{2x}$ یک جواب اختصاصی معادله ی $y' - 2y = 0$ خواهد شد.

منظور از حل یک معادله ی دیفرانسیل تعیین جواب عمومی آن است. می توان تحت شرایط خاص مقادیر ثابت را محاسبه نمود و جواب اختصاصی معادله را نیز تعیین کرد.

تمرین : نشان دهید که تابع $y = f(x) = \sqrt{\frac{1}{\lambda}c^2 + cx}$ یک جواب عمومی معادله ی $y''y'^2 + 2xy' = y$ است.

سپس یک جواب اختصاصی برای این معادله طوری بیابید که $f(0) = 1$

حل : ابتدا نشان می دهیم که جواب داده شده در معادله صدق می کند.

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{1}{\lambda}c^2 + cx} \rightarrow y' = \frac{c}{2\sqrt{\frac{1}{\lambda}c^2 + cx}} = \frac{c}{2y}$$

$$y''y'^2 + 2xy' = y'^2 \left(\frac{c}{2y}\right)^2 + 2x\left(\frac{c}{2y}\right) = \frac{c^2}{\lambda y} + \frac{cx}{y} = \frac{c^2 - \lambda cx}{\lambda y} = \frac{\lambda(\frac{1}{\lambda}c^2 - cx)}{\lambda y} = \frac{\lambda y^2}{\lambda y} = y$$

حال با توجه به شرط داده شده یک جواب اختصاصی برای معادله تعیین می کنیم.

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{\lambda}c^2 + cx} \xrightarrow{f(0)=1} \sqrt{\frac{1}{\lambda}c^2 + c(0)} = 1 \rightarrow \frac{1}{\lambda}c^2 = 1 \rightarrow c^2 = \lambda \rightarrow c = 2$$

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{1}{\lambda}(2)^2 + (2)x} = \sqrt{1 + 2x}$$

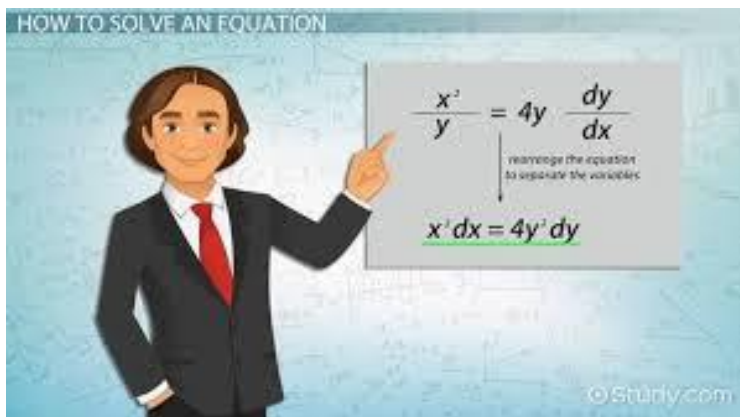
معادلات دیفرانسیل مرتبه ی اول

همانطور که قبلاً داشتیم معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول ، معادله ی دیفرانسیلی است که بالاترین مرتبه ی مشتق موجود در آن ، یک باشد. یعنی این معادله شامل متغیر مستقل x تابع y و مشتق مرتبه ی اول آن y' می باشد. برای مثال معادله ی زیر یک معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول است.

$$x + 2y' = 3y$$

منظور از حل معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول یافتن تابعی است که خود و مشتق مرتبه ای اول آن در معادله صدق می کند.

1. معادلات تفکیک پذیر



معادلات دیفرانسیل تفکیک پذیر (جدایی پذیر)

هر معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول به شکل $m(x)dx + n(y)dy = 0$ را که در آن m و n دو تابع حقیقی پیوسته باشند، را تفکیک پذیر یا جدایی پذیر می نامند. به سادگی با انتگرال گیری از این معادله ، جواب عمومی آن به شکل زیر به دست می آید.

$$\int m(x)dx + \int n(y)dy = c$$

مثال : معادله ی $(2x + 1)dx + 3y^2 dy = 0$ یک معادله ی جدایی پذیر است. لذا می توان جواب عمومی آن را به شکل زیر تعیین کرد.

$$(2x + 1)dx + 3y^2 dy = 0 \rightarrow \int (2x + 1)dx + \int 3y^2 dy = c \rightarrow x^2 + x + y^3 = c \rightarrow y^3 = c - x^2 - x \\ \rightarrow y = \sqrt[3]{c - x^2 - x}$$

مثال های بیشتر از معادلات تفکیک پذیر SEPARABLE EQUATION

Separable Differential Equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x+3}$$

تمرین: نشان دهید که معادله ی دیفرانسیل $x^2 y^2 dx - dy = 0$ تفکیک پذیر است. سپس آن را حل کنید.

حل :

$$x^2 y^2 dx - dy = 0 \xrightarrow{\div y^2} x^2 dx - \frac{1}{y^2} dy = 0$$

لذا این معادله تفکیک پذیر است. پس می توان جواب عمومی آن را به شکل زیر تعیین کرد.

$$\int x^2 dx - \int \frac{1}{y^2} dy = c \rightarrow \int x^2 dx - \int y^{-2} dy = c \rightarrow x^3 + y^{-1} = c$$

$$\rightarrow x^3 + \frac{1}{y} = c \rightarrow \frac{1}{y} = c - x^3 \rightarrow y = \frac{1}{c - x^3}$$

تمرین: معادله ی دیفرانسیل $x(1+y^2)dx + \frac{y}{x}dy = 0$ را حل کنید.

حل: دو طرف معادله را x ضرب و سپس بر $1+y^2$ تقسیم می کنیم.

$$x^2 dx + \frac{y}{1+y^2} dy = 0 \rightarrow \int x^2 dx + \int \frac{y}{1+y^2} dy = c \rightarrow \int x^2 dx + \frac{1}{2} \int \frac{2y}{1+y^2} dy = c$$

$$\rightarrow x^3 + \frac{1}{2} \ln |1+y^2| = c$$

تمرین: معادله ی دیفرانسیل $y' = \frac{x-1}{2y-3}$ را حل کنید.

حل: کافی است $\frac{dy}{dx}$ را به جای y' قرار دهیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{2y-3} \rightarrow (x-1)dx - (2y-3)dy = 0 \rightarrow \int (x-1)dx - \int (2y-3)dy = c$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}x^2 - x - y^2 + 3y = c$$

معادلات همگن

Homogeneous Differential Equation

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}$$

تعریف: تابع دو متغیره $f(x, y)$ را همگن از درجه n (یک عدد صحیح است) می نامند، هرگاه وجود داشته باشد t حقیقی به طوری که:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

تابع همگن چند متغیره نیز به شکل مشابه تعریف می شود.

مثال: تابع $f(x, y) = 2x^2y - 3x^3 + \frac{y^5}{x^2}$ همگن از درجه 3 است. زیر به ازای هر t داریم.

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= 2(tx)^2(ty) - 3(tx)^3 + \frac{(ty)^5}{(tx)^2} \\ &= 2t^3x^2y - 3t^3x^3 + t^3\frac{y^5}{x^2} = t^3(2x^2y - 3x^3 + \frac{y^5}{x^2}) = t^3f(x, y) \end{aligned}$$

تمرین برای حل: ثابت کنید که هر یک از توابع زیر همگن هستند و سپس درجه ی آنها را تعیین کنید.

$$۱) f(x, y) = x^5 - x^2y^2 + y^5$$

$$۵) f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$۲) f(x, y, z) = xy + yz + xz$$

$$۶) f(x, y, z) = x \sin\left(\frac{y}{z}\right)$$

$$۳) f(x, y, z) = xyz$$

$$۷) f(x, y) = xye^{\frac{x}{y}}$$

$$۴) f(x, y) = 2$$

$$۸) f(x, y) = \cos \frac{x}{y}$$

معادلات همگن (ادامه)

تعریف: هر معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول به شکل $m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0$ را که در آن m و n دو تابع همگن از یک درجه باشند، را همگن می نامند. ثابت می شود که با تغییر متغیر $y = xv$ می توان معادله ی همگن را تبدیل به یک معادله ی دیفرانسیل جدایی پذیر نمود و سپس حل کرد.

$$\begin{cases} y = xv \\ dy = vdx + xdv \end{cases}$$

مثال: معادله ی دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$(y^2 - 2xy)dx + 2x^2 dy = 0$$

واضح است این معادله همگن می باشد. زیر دو تابع $m(x, y) = y^2 - 2xy$ و $n(x, y) = 2x^2$ همگن از درجه ۲ هستند.

$$m(x, y) = y^2 - 2xy$$

$$\rightarrow m(tx, ty) = (ty)^2 - 2(tx)(ty) = t^2 y^2 - 2t^2 xy = t^2 (y^2 - 2xy) = t^2 m(x, y)$$

$$n(x, y) = 2x^2$$

$$\rightarrow n(tx, ty) = 2(tx)^2 = 2t^2 x^2 = t^2 n(x, y)$$

حال قرار می دهیم:

$$y = xv$$

$$\rightarrow dy = (vdx + xdv)$$

با قرار دادن این تساوی ها در معادله ی دیفرانسیل داده شده به دست می آوریم.

$$(y^2 - 2xy)dx + 2x^2 dy = 0$$

$$\rightarrow (x^2 v^2 - 2x^2 v)dx + 2x^2 (xdv + vdx) = 0 \rightarrow x^2 v^2 dx + 2x^2 dv = 0$$

$$\xrightarrow{\div x^2 v^2} \frac{1}{x} dx + \frac{2}{v^2} dv = 0$$

معادله ی اخیر یک معادله ی جدایی پذیر است و با انتگرال گیری مستقیم از این معادله داریم:

$$\int \frac{1}{x} dx + \int \frac{2}{v^2} dv = c \rightarrow L_n |x| - \frac{2}{v} = c$$

اینک در این جواب قرار می دهیم $v = \frac{y}{x}$ به دست می آوریم.

$$L_n |x| - \frac{2x}{y} = c \rightarrow y = \frac{2x}{L_n |x| - c}$$

مثال بیشتر از معادلات همگن

تمرین : معادله ی دیفرانسیل $(x^2 + y^2)dx - xydy = 0$ را حل کنید.

حل : ابتدا نشان می دهیم که توابع $m(x, y) = x^2 + y^2$ و $n(x, y) = xy$ همگن از یک درجه هستند.

$$m(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\rightarrow m(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2 = t^2(x^2 + y^2) = t^2 m(x, y)$$

$$n(x, y) = xy$$

$$\rightarrow n(tx, ty) = (tx)(ty) = t^2(xy) = t^2 n(x, y)$$

پس معادله ی داده شده همگن است. حال قرار می دهیم:

$$y = xv$$

$$\rightarrow dy = (vdx + xdv)$$

با قرار دادن این تساوی ها در معادله ی دیفرانسیل داده شده به دست می آوریم.

$$(x^2 + x^2 v^2)dx - (x^2 v)(vdx + xdv) = 0$$

$$\rightarrow x^2(1 + v^2)dx - x^2(v^2 dx + vdv) = 0 \xrightarrow{\div x^2} (1 + v^2)dx - (v^2 dx + vdv) = 0$$

$$\rightarrow dx - vdv = 0 \xrightarrow{\div x} \frac{1}{x}dx - vdv = 0$$

معادله ی اخیر یک معادله ی جدایی پذیر است و با انتگرال گیری مستقیم از این معادله داریم:

$$\int \frac{1}{x}dx - \int vdv = c \rightarrow L_n |x| - \frac{1}{2}v^2 = c$$

اینک در این جواب قرار می دهیم $v = \frac{y}{x}$ به دست می آوریم.

$$L_n |x| - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2 = c \rightarrow L_n |x| - \frac{y^2}{2x^2} = c$$

مثال از معادلات همگن

تمرین: معادله ی دیفرانسیل $y' = \frac{x-y}{x+y}$ را حل کنید.

حل: ابتدا $\frac{dy}{dx}$ را جایگزین y' می کنیم.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y} \rightarrow (x-y)dx - (x+y)dy = 0$$

حال نشان می دهیم که توابع $m(x, y) = x - y$ و $n(x, y) = x + y$ همگن از یک درجه هستند.

$$m(x, y) = x - y$$

$$\rightarrow m(tx, ty) = (tx) - (ty) = t(x - y) = t m(x, y)$$

$$n(x, y) = x + y$$

$$\rightarrow n(tx, ty) = (tx) + (ty) = t(x + y) = t n(x, y)$$

پس معادله ی داده شده همگن است. حال قرار می دهیم:

$$y = xv$$

$$\rightarrow dy = (vdx + xdv)$$

با قرار دادن این تساوی ها در معادله ی دیفرانسیل داده شده به دست می آوریم.

$$(x - xv)dx - (x + xv)(vdx + xdv) = 0 \rightarrow \frac{1}{x}dx - \frac{1+v}{1-2v-v^2}dv = 0$$

معادله ی اخیر یک معادله ی جدایی پذیر است و با انتگرال گیری مستقیم از این معادله داریم:

$$\int \frac{1}{x}dx - \int \frac{1+v}{1-2v-v^2}dv = c \rightarrow L_n |x| + \frac{1}{2} L_n (1-2v-v^2) = c$$

اینک در این جواب قرار می دهیم $v = \frac{y}{x}$ به دست می آوریم.

$$L_n |x| + \frac{1}{2} L_n (1 - \frac{2y}{x} - \frac{y^2}{x^2}) = c$$

تمرین: معادله ی دیفرانسیل $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$ را با شرط اولیه ی $y(1) = 0$ حل کنید.

حل: ابتدا نشان می دهیم که توابع $m(x, y) = x + y$ و $n(x, y) = x - y$ همگن از یک درجه هستند.

$$m(x, y) = x + y$$

$$\rightarrow m(tx, ty) = (tx) + (ty) = t(x + y) = t m(x, y)$$

$$n(x, y) = x - y$$

$$\rightarrow n(tx, ty) = (tx) - (ty) = t(x - y) = t n(x, y)$$

پس معادله ی داده شده همگن است. حال قرار می دهیم:

$$y = xv$$

$$\rightarrow dy = (vdx + xdv)$$

با قرار دادن این تساوی ها در معادله ی دیفرانسیل داده شده به دست می آوریم.

$$(x + xv)dx + (x - xv)(vdx + xdv) = 0$$

$$\rightarrow (1 + 2v - v^2)dx + x(1 - v)dv = 0 \xrightarrow{\div x(1+2v-v^2)} \frac{1}{x}dx + \frac{1-v}{1+2v-v^2}dv = 0$$

معادله ی اخیر یک معادله ی جدایی پذیر است و با انتگرال گیری مستقیم از این معادله داریم:

$$Mdx + Ndy = 0$$

$$M_y = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad N_x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

معادلات دیفرانسیل کامل

تعریف: هر معادله ی دیفرانسیل مرتبه ی اول به شکل $m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0$ را کامل می نامند، هرگاه

$$\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x}$$

مثال: معادله ی دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید.

$$(\Delta x^3 - 2y^2)dx + (3y - 4xy)dy = 0$$

واضح است این معادله کامل می باشد. زیرا اگر قرار دهیم:

$$m(x, y) = \Delta x^3 - 2y^2$$

$$n(x, y) = 3y - 4xy$$

آنگاه

$$\frac{\partial}{\partial y} m(x, y) = -4y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} n(x, y) = -4y$$

و چون $\frac{\partial}{\partial y} m(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} n(x, y)$ پس معادله ی داده شده کامل است.

توجه: اگر معادله ی $m(x, y)dx + n(x, y)dy = 0$ کامل باشد، در این صورت جواب عمومی آن از رابطه ی زیر به

دست می آید.

$$\int m(x, y)dx + \int n^*(y)dy = c$$

که در آن $n^*(y)$ جملات فاقد x در تابع $n(x, y)$ می باشد.

تمرین: معادله ی دیفرانسیل $(y - 2x + 1)dx + (x - \frac{1}{y} + 3)dy = 0$ را حل کنید.

حل: ابتدا نشان می دهیم که معادله ی داده شده کامل است. برای این کار داریم:

$$m(x, y) = y - 2x + 1 \rightarrow \frac{\partial m}{\partial y} = 1$$

$$n(x, y) = x - \frac{1}{y} + 3 \rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} = 1$$

و چون $\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x}$ پس معادله ی داده شده کامل است. حال جواب عمومی آن را به صورت زیر تعیین می کنیم.

$$\int m(x, y)dx + \int n^*(y)dy = c \rightarrow \int (y - 2x + 1)dx + \int (-\frac{1}{y} + 3)dy = c$$

$$\rightarrow xy - x^2 + x - L_n y + 3y = c$$

تمرین: معادله ی دیفرانسیل $(y \cos(xy) + ye^{xy} - \frac{1}{x})dx + (x \cos(xy) + xe^{xy} + \frac{1}{y} - 1)dy = 0$ را حل کنید.

حل: ابتدا نشان می دهیم که معادله ی داده شده کامل است. برای این کار داریم:

$$m(x, y) = y \cos(xy) + ye^{xy} - \frac{1}{x} \rightarrow \frac{\partial m}{\partial y} = \cos(xy) - xy \sin(xy) + e^{xy} + xye^{xy}$$

$$n(x, y) = (x \cos(xy) + xe^{xy} + \frac{1}{y} - 1) \rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} = \cos(xy) - xy \sin(xy) + e^{xy} + xye^{xy}$$

و چون $\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x}$ پس معادله ی داده شده کامل است. حال جواب عمومی آن را به صورت زیر تعیین می کنیم.

$$\int m(x, y)dx + \int n^*(y)dy = c \rightarrow \int (y \cos(xy) + ye^{xy} - \frac{1}{x})dx + \int (\frac{1}{y} - 1)dy = c$$

$$\rightarrow \sin(xy) + e^{xy} - L_n x + L_n y - y = c$$

مثال بیشتر از معادلات دیفرانسیل کامل

تمرین : معادله ی دیفرانسیل $(y \cos(xy) + ye^{xy} - \frac{1}{x})dx + (x \cos(xy) + xe^{xy} + \frac{1}{y} - 1)dy = 0$ را حل

کنید.

حل : ابتدا نشان می دهیم که معادله ی داده شده کامل است. برای این کار داریم:

$$m(x, y) = y \cos(xy) + ye^{xy} - \frac{1}{x} \rightarrow \frac{\partial m}{\partial y} = \cos(xy) - xy \sin(xy) + e^{xy} + xye^{xy}$$

$$n(x, y) = (x \cos(xy) + xe^{xy} + \frac{1}{y} - 1) \rightarrow \frac{\partial n}{\partial x} = \cos(xy) - xy \sin(xy) + e^{xy} + xye^{xy}$$

و چون $\frac{\partial m}{\partial y} = \frac{\partial n}{\partial x}$ پس معادله ی داده شده کامل است. حال جواب عمومی آن را به صورت زیر تعیین می کنیم.

$$\int m(x, y)dx + \int n^*(y)dy = c \rightarrow \int (y \cos(xy) + ye^{xy} - \frac{1}{x})dx + \int (\frac{1}{y} - 1)dy = c$$

$$\rightarrow \sin(xy) + e^{xy} - L_n x + L_n y - y = c$$

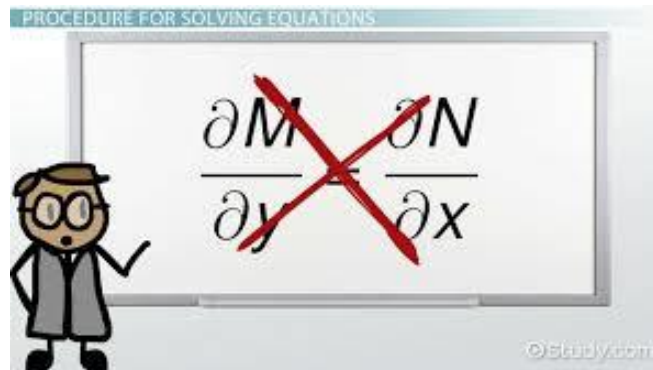
تمرین برای حل: هر یک از معادلات دیفرانسیل زیر را حل کنید.

۱) $(y + x^2)dx + xdy = 0$

۲) $(y + \sin x)dx + (x + \frac{1}{y})dy = 0$

۳) $(ye^{xy} - x^2)dx + xe^{xy}dy = 0$

معادلات ناقص



بحث عامل انتگرال ساز

۱. اگر معادله $y(x+y)dx + (x+by-1)dy = 0$ دارای عاملی برحسب x باشد، b کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

اگر معادله $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ کامل نباشد، ممکن است با ضرب کردن در تابع $\mu = \mu(x,y)$ به معادله‌ای کامل تبدیل شود. در این صورت به μ عامل (فاکتور) انتگرال گفته می‌شود.

نکته ۱. برای یافتن عامل انتگرال معادله $Mdx + Ndy = 0$ به شرط آنکه عامل انتگرال تابعی از $z = z(x,y)$ باشد، ابتدا کسر $k(z) = \frac{M_y - N_x}{Nz_x - Mz_y}$ را تشکیل داده و از فرمول $\mu = e^{\int k(z)dz}$ عامل انتگرال را محاسبه می‌کنیم.

(۱) اگر عامل انتگرال تابعی از x باشد یعنی $z = x$: $\mu(x) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$

(۲) اگر عامل انتگرال تابعی از y باشد یعنی $z = y$: $\mu(y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}$

(۳) اگر عامل انتگرال تابعی از xy باشد یعنی $z = xy$: $\mu(x,y) = e^{\int \frac{M_y - N_x}{yN - xM} d(xy)}$

۲. فاکتور انتگرال معادله $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$ کدام است؟ (شیمی نساجی - آزاد ۸۱)

- (۱) x (۲) $\frac{1}{y}$ (۳) $\frac{1}{x}$ (۴) $\frac{1}{y^2}$

حل: گزینه ۱ درست است. باتوجه به گزینه‌ها

$$M_y - N_x = 2y - y = y \Rightarrow \frac{M_y - N_x}{N} = \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} \Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$$

(معادن ۸۱) فاکتور انتگرال معادله $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$ کدام است؟

- (۱) y^{-1} (۲) y^{-2} (۳) x^{-1} (۴) x^{-2}

حل: گزینه ۴ درست است. در گزینه‌ها μ تابعی از x یا تابعی از y است پس

$$M_y - N_x = 2y - (-2y) = 4y \Rightarrow \frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{2}{x} = k(x) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int k(x)dx} = x^{-2}$$

کدام یک از توابع زیر عامل انتگرال ساز برای معادله $y \cos x dx + 3 \sin x dy = 0$ است؟

(هوافضا - آزاد ۷۷)

$$(1) y^2 \quad (2) (\sin x)^{-\frac{2}{3}} \quad (3) \frac{1}{y} \quad (4) \text{ جواب های ۱ و ۲}$$

حل: گزینه ۴ درست است. با توجه به اینکه $M_y - N_x = \cos x - 3 \cos x = -2 \cos x$ داریم:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-2 \cos x}{3 \sin x} = -\frac{2}{3} \cot x \Rightarrow \mu(x) = e^{-\frac{2}{3} \int \cot x dx} = e^{-\frac{2}{3} \ln \sin x} = (\sin x)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{-2 \cos x}{-y \cos x} = \frac{2}{y} \Rightarrow \mu(y) = e^{\int \frac{2}{y} dy} = y^2$$

$$M_y - N_x = 2y - (-2y) = 4y \Rightarrow \frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{2}{x} = k(x) \Rightarrow \mu(x) = e^{\int k(x) dx} = x^{-2}$$

حل معادله دیفرانسیل ناقص که با ضرب در عامل انتگرال کامل می شود

یادآوری:

معادله دیفرانسیل $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ کامل نامیده می شود هرگاه $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$. در این صورت تابع دو متغیره $\phi = \phi(x, y)$ موجود است که $\frac{\partial \phi}{\partial y} = N$ و $\frac{\partial \phi}{\partial x} = M$. در این حالت جواب معادله دیفرانسیل $\phi(x, y) = c$ خواهد بود که گاهی آنرا انتگرال معادله نیز می خوانیم. تابع ϕ در ریاضی عمومی (۲) تابع پتانسیل برای میدان برداری $F = (M, N)$ نامیده می شود و در واقع $d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = Mdx + Ndy$ و لذا اگر معادله دیفرانسیل کامل باشد، $Mdx + Ndy$ دیفرانسیل کامل تابع ϕ است.

تذکره: محاسبات انجام شده برای به دست آوردن ϕ را به صورت زیر می توان خلاصه کرد:

ابتدا از ضریب dx یعنی M ، نسبت به x انتگرال می گیریم تا $xy^2 + x^2$ به دست آید. سپس در ضریب dy کلیه عباراتی که در آنها x وجود دارد را کنار می گذاریم و از آنچه باقی می ماند یعنی $2y^2$ (که آنرا با نماد N^* نمایش می دهیم.) نسبت به y انتگرال می گیریم تا y^3 حاصل شود. مجموع این دو عبارت یعنی $x^2 + xy + y^3$ پتانسیل است. توضیحات بالا را به صورت $\phi = \int M dx + \int N^* dy$ می توان نوشت. (در واقع N^* جملاتی هستند که مشتق آنها نسبت به x صفر است.)

مثال ۱۷. معادلات زیر را پس از یافتن عامل انتگرال مناسب حل کنید.

$$\text{الف) } (y^3 + 4x)dx + xy^2 dy = 0 \quad \text{ب) } ydx + (2xy - e^{-2y})dy = 0$$

الف) چون $0 \neq 2y^2 - y^3 = 3y^2 - y^3 = M_y - N_x$ این معادله کامل نیست. اگر $M_y - N_x$ را بر ضریب dy یعنی $N = xy^2$ تقسیم کنیم $\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{2}{x}$ فقط تابع x است پس از قسمت (۱) از نکته ۱۲ در صفحه قبل:

$$\mu = e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx} = e^{\int \frac{2dx}{x}} = x^2$$

حال با ضرب μ در معادله به $0 = (x^2 y^3 + 4x^3)dx + x^3 y^2 dy$ می رسیم که کامل است.

$$M = x^2 y^3 + 4x^3 \text{ و } N^* = 0 \Rightarrow \int M dx + \int N^* dy = \frac{1}{3} x^3 y^3 + x^4 = c$$

ب) چون $0 \neq 1 - 2y = M_y - N_x$ پس معادله کامل نیست اما:

$$\frac{M_y - N_x}{-M} = \frac{1 - 2y}{-y} = 2 - \frac{1}{y} \text{ فقط تابع } y \text{ است.}$$

$$\xrightarrow{\text{قسمت ۲ از نکته ۱۲}} \mu(y) = e^{\int (2 - \frac{1}{y}) dy} = e^{2y - \ln y} = e^{2y} \cdot e^{-\ln y} = \frac{e^{2y}}{y}$$

و با ضرب معادله در μ به $0 = e^{2y} dx + (2xe^{2y} - \frac{1}{y})dy$ می رسیم.

$$M = e^{2y} \text{ و } N^* = -\frac{1}{y} \Rightarrow \int M dx + \int N^* dy = xe^{2y} - \ln|y| = c$$

معادله برنولی

مثال معادله $xy' - y = \frac{3}{4}xy^3$ را حل کنید.

هر معادله به صورت $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$ وقتی $\alpha \neq 0, 1$ را برنولی از درجه α می‌نامیم. برای حل این معادله کافی است دوطرف را بر y^α تقسیم کنیم تا به معادله غیر خطی $y^{-\alpha}y' + p(x)y^{1-\alpha} = q(x)$ تبدیل شود. (در این عمل ممکن است $y = 0$ به عنوان یک جواب از معادله برنولی حذف شود.) و سپس از تغییر متغیر (تغییر تابع) $z = y^{1-\alpha}$ استفاده کنیم تا به معادله‌ای خطی بر حسب z برسیم در این صورت

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha \xrightarrow{z=y^{1-\alpha}} \frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x) \quad (2-4)$$

تست کدامیک از تبدیلات زیر معادله $y' + P(x)y = y^4 Q(x)$ را تبدیل به یک معادله خطی خواهد کرد؟

(مکانیک ۷۰)

$$z = y^4 \quad (2)$$

$$z = y^3 \quad (1)$$

$$z = y^{-3} \quad (3)$$

(۴) معادله فوق را نمی‌توان خطی کرد.

حل: گزینه ۳ درست است. این معادله برنولی از درجه $\alpha = 4$ است و با تغییر متغیر $z = y^{1-\alpha} = y^{-3}$ به معادله خطی تبدیل می‌شود.

تست ۱۰۰ جواب معادله دیفرانسیل $y' - x^{-1}y = -x^{-1}y^2$ کدام است؟ (نفت، فراوری و انتقال گاز ۸۲)

$$y = \frac{x}{c-x} \quad (4)$$

$$y = \frac{x}{x+c} \quad (3)$$

$$y = \frac{c+x}{x} \quad (2)$$

$$y = \frac{c-x}{x} \quad (1)$$

حل: گزینه ۳ درست است. معادله، برنولی با $\alpha = 2$ است و لذا از تغییر متغیر $z = y^{1-\alpha} = y^{-1}$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{z'}{-1} - x^{-1}z = -x^{-1} \Rightarrow z' + \frac{1}{x}z = \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{نکته ۵ در صفحه ۴۰}} \mu(x) = x$$

$$\Rightarrow z = \frac{1}{x} \int x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{x}(x+c) \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{x+c}{x} \Rightarrow y = \frac{x}{x+c}$$

حل:

این معادله، برنولی از درجه $\alpha = 3$ است. $y = 0$ در این معادله صدق می‌کند. برای یافتن جواب عمومی، با استفاده از تغییر متغیر $z = y^{1-\alpha} = y^{-2}$ و با توجه به رابطه (۲-۴) به معادله $x \frac{z'}{2} - z = \frac{3}{4}x$ می‌رسیم که خطی مرتبه اول بوده و به صورت استاندارد $z' + \frac{2}{x}z = -\frac{3}{2}x$ نوشته می‌شود. از نکته ۵ در صفحه ۴۰:

$$\mu(x) = x^2 \Rightarrow z = \frac{1}{x^2} \int -\frac{3}{2}x^2 dx = \frac{-x^3 + c}{x^2} \Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{c - x^3}$$

(هسته‌ای ۸۲)	برای آنکه معادله دیفرانسیل $x^n \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + g(x)y^m = f(x)$ خطی باشد، باید:		
$g(x)$ مقدار ثابت باشد (۴)	$f(x) = 0$ (۳)	$n = 0$ (۲)	$m = 1$ (۱)

هر معادله دیفرانسیل که به صورت $F(x, y, y', y'') = 0$ نوشته می‌شود، یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم می‌باشد. در این فصل روش‌های متداول برای حل این معادلات را ارائه نموده و این روش‌ها را برای معادلات با مراتب بالاتر تعمیم می‌دهیم.

به‌طور کلی معادلات دیفرانسیل به دو دسته خطی و غیرخطی تقسیم می‌شوند. از آنجایی که روش‌های مختص به معادلات خطی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند، بحث خود را از حل این معادلات آغاز می‌کنیم.

۲-۱- معادلات مرتبه دوم خطی

شکل کلی این معادلات به صورت مقابل می‌باشد:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

چنانچه در معادله فوق، $R(x) = 0$ باشد، معادله به دست آمده را همگن و اگر $R(x) \neq 0$ باشد، معادله را غیرهمگن می‌نامیم.

(هوافضا ۷۷)

۱- معادله دیفرانسیل $xy'' + |y| + x^2 = 0$

۲- معادله دیفرانسیل معمولی غیرخطی و غیرهمگن است.

۴- معادله دیفرانسیل معمولی، غیرخطی و همگن است.

۱- خطی از مرتبه دوم و همگن است.

۳- از نوع کوشی‌اویلر است.

۱- گزینه (۲) صحیح است.

معادله مزبور به دلیل وجود جمله $|y|$ غیرخطی است و وجود جمله x^2 در آن باعث شده تا معادله غیرهمگن باشد. چون مشتقات موجود در معادله فقط نسبت به یک متغیر مستقل (x) می‌باشد، این معادله از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی می‌باشد. البته همگن یا غیرهمگن بودن در مورد معادلات خطی مطرح می‌شود.

- تحقیق کنید $y(x) = x$ جوابی از معادله $y'' + y' + xy = x^2 + 1$ است ولی $cy(x)$ جوابی از معادله نیست ($c \neq 0$)، آیا این مطلب با نتیجه ی قضیه ی ۲ در تناقض نیست ؟

$y(x) = x \Rightarrow y'(x) = 1, y''(x) = 0$

جواب معادله $\xrightarrow{\text{جاگذار در معادله}} y'' + y' + xy = x^2 + 1 \Rightarrow 0 + 1 + x^2 = x^2 + 1 \Rightarrow y(x) = x$

$y(x) = cx \Rightarrow y'(x) = c, y''(x) = 0$

$\xrightarrow{\text{جاگذار در معادله}} y'' + y' + xy = x^2 + 1 \Rightarrow 0 + c + cx^2 = x^2 + 1$

$\Rightarrow C(x^2 + 1) = x^2 + 1 \quad \text{if } c \neq 0, 1 \Rightarrow y(x) = cx$ جواب معادله نیست

حل:

تنها کافی است که $m = 1$ یا $m = 0$ باشد. لزومی ندارد که m محدودیت خاصی داشته باشد.

قضایای معادلات خطی

۱. اگر y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی برای معادله دیفرانسیل $y'' + \sin xy' + y^2 = 0$ باشند، آنگاه: (۱) $y_1 + y_2$ نیز جواب است. (۲) cy_1 نیز جواب است. (۳) $y_1 y_2$ نیز جواب است. (۴) هیچکدام (شیمی نسا جی ۸۰)	
معادله دیفرانسیل مرتبه دوم را خطی گوئیم، اگر به فرم $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ بیان شود.	
اگر در معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$، $r(x) \equiv 0$ باشد، معادله را همگن و در غیر این صورت، غیرهمگن می گویند. صورت کلی معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن به فرم زیر می باشد: $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$	
توابع $p(x)$ و $q(x)$ در معادله $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ را ضرایب معادله می نامیم.	
	قضیه
اگر $y_1 = G(x)$ یک جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشد. آنگاه $y = cG(x)$ (c ثابت دلخواه) نیز یک جواب معادله خواهد بود.	
	قضیه
اگر y_1 و y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل خطی همگن $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ باشند. آنگاه $y_1 + y_2$ نیز یک جواب معادله خواهد بود.	
	تذکر
از قضایای قبل نتیجه می گیریم که اگر y_1 و y_2 دو جواب برای معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم، همگن باشند، در این صورت $c_1 y_1 + c_2 y_2$ نیز یک جواب خواهد بود.	
	تذکر
قضایای قبل فقط برای معادلات خطی همگن برقرار است (از هر مرتبه دلخواه n) و برای معادلات غیر خطی و غیر همگن برقرار نیست.	
حل: معادله مورد نظر تمام شرایط گفته شده در بالا (همگن بودن) را دارد امالذا گزینه 4 صحیح است.	

مفهوم استقلال یا وابستگی خطی جواب ها و محک این مفهوم به وسیله رنکسین

(مواد - آزاد ۸۰)	رنکسین دو جواب معادله $y'' - 4y' + 4y = 0$ برابر است با: (۱) xe^{-x} (۲) xe^x (۳) x^2e^x (۴) e^{4x}
	قضیه: اگر y_1, y_2 دو جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم خطی و همگن باشند هر ترکیب خطی از آنها نیز یک جواب معادله است. تعریف: $w(f, g)$ را رنکسین دو تابع $f(x), g(x)$ می گویند که به صورت زیر تعریف می شود: $W(f, g) = \det \begin{bmatrix} f & g \\ f' & g' \end{bmatrix} = fg' - gf'$ دو تابع $f(x), g(x)$ را در فاصله (α, β) وابسته خطی گوئیم هر گاه یکی مضربی از دیگری باشد و مستقل خطی گوئیم، هر گاه وابسته نباشند یعنی یکی مضربی از دیگری نباشد. نکته: اگر y_1, y_2 دو جواب معادله درجه دوم خطی باشند آنگاه y_1, y_2 مستقل خطی اند و اگر تنها رنکسین آنها در هیچ نقطه ای صفر نشود ($w \neq 0$) مثال: دو تابع $y_1(x) = e^x$ و $y_2(x) = e^{-x}$ مستقل خطی هستند؛ زیرا رنکسین آنها مخالف صفر است: $w(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{vmatrix} = -e^x e^{-x} = -1 \neq 0$ (الف) x, xe^x , $x \neq 0$ $\begin{vmatrix} x & xe^x \\ 1 & e^x + xe^x \end{vmatrix} = xe^x + x^2e^x - xe^x = x^2e^x \neq 0 \quad (x \neq 0)$ (ت) $\sin \lambda x, \cos \lambda x$, $\lambda \neq 0$ $\begin{vmatrix} \sin \lambda x & \cos \lambda x \\ \cos \lambda x & -\sin \lambda x \end{vmatrix} = -\lambda \sin^2 \lambda x - \lambda \cos^2 \lambda x = -\lambda \neq 0$
	حل:

معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

تست ۱: معادله دیفرانسیل $y'' + 2y' - 3y = 0$ را حل نمایید. (عمران - آزاد ۸۰)

$$(1) \quad y = Ae^x + Be^{-3x} \quad (2) \quad y = Ae^{-x} + Be^{3x} \quad (3) \quad y = Ae^x + Be^{3x} \quad (4) \quad y = Ae^{-x} + Be^{-3x}$$

معادله دیفرانسیل به فرم

$$y'' + ay' + by = 0$$

را معادله دیفرانسیل خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت می نامیم که در آن $a, b \in R$ مقادیر ثابت هستند و دامنه x محور x ها می باشد.

پس برای حل معادله $y'' + ay' + by = 0$ ابتدا معادله $t^2 + at + b = 0$ را که به آن معادله مفسر یا معادله شاخصی می گوئیم را تشکیل می دهیم. و ریشه های آن را بدست می آوریم. چون این معادله یک معادله درجه دوم با ضرایب حقیقی می باشد، پس سه حالت ممکن است رخ دهد:

حالت اول: معادله مفسر دارای دو ریشه حقیقی متمایز باشد ($\Delta > 0$)

اگر این دو ریشه را t_1 و t_2 نشان دهیم، آنگاه

$$y_1 = e^{t_1 x}, \quad y_2 = e^{t_2 x}$$

جواب های $y'' + ay' + by = 0$ می باشند.

حالت دوم: معادله مفسر دارای دو رشته متمایز مختلط یا موهومی باشد ($\Delta < 0$)

اگر مبین معادله مفسر (Δ) منفی باشد در این صورت جوابهای معادله مفسر به صورت

$$t_1 = p + iq, \quad t_2 = p - iq$$

خواهد بود.

اگر معادله مفسر دارای دو ریشه بصورت $p \pm iq$ باشد، در این صورت، جواب عمومی معادله $y'' + ay' + by = 0$ به فرم زیر می باشد:

$$y(x) = e^{px}(A \cos qx + B \sin qx)$$

حالت سوم: معادله مفسر دارای ریشه مضاعف باشد. ($\Delta = 0$)

در این حالت ریشه های معادله مفسر، مساوی هستند. یعنی $t_1 = t_2 = t$ ، پس یک جواب معادله

$$y_1 = e^{tx}, \quad t = -\frac{a}{2}$$

و جواب عمومی بفرم زیر می باشد:

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{tx}$$

تست ۲: جواب عمومی معادله دیفرانسیل $3\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} - y = 0$ برابر است با: (پلیمیر ۷۴)

$$(1) \quad y = c_1 x + c_2 \quad (2) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} \quad (3) \quad y = c_1 \ln x + c_2 e^x \quad (4) \quad y = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{x}{3}}$$

حل: گزینه ۴ درست است. معادله مشخصه را تشکیل می دهیم.

$$3r^2 - 2r - 1 = 0 \xrightarrow{\text{مجموع ضرایب} = 0} r = 1 \text{ و } -\frac{1}{3} \Rightarrow y = c_1 e^x + c_2 e^{-\frac{x}{3}}$$

حل:

معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت

۱. به ازای چه مقادیر از λ تابع $e^{\lambda x}$ حل معادله $y'' - 5y' + 6y = 0$ است؟ (انرژی - آزاد ۸۰)

$$(1) \quad 2 \text{ و } 3 \quad (2) \quad 6 \text{ و } -5 \quad (3) \quad 5 \text{ و } -6 \quad (4) \quad -3 \text{ و } -2$$

حل: گزینه ۱ درست است. معادله داده شده ضرایب ثابت است و جواب‌های آن e^{rx} هستند که r ریشه معادله مشخصه است یعنی $r^2 - 5r + 6 = 0$ و بنابراین $r = 2, 3$.

۲. جواب معادله $y'' + 7y' + 12y = 0$ کدام گزینه است؟ (علوم دریایی ۸۰)

$$(1) \quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-4x} \quad (2) \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$$

$$(3) \quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-5x} \quad (4) \quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$$

حل: گزینه ۱ درست است. معادله مشخصه عبارت است از:

$$r^2 + 7r + 12 = 0 \Rightarrow r = -3 \text{ و } -4 \Rightarrow y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-4x}$$

۳. جواب عمومی معادله $y'' + 2y' - 15y = 0$ کدام است؟ (انرژی - آزاد ۸۲)

$$(1) \quad y = Ae^{-2x} + Be^{5x} \quad (2) \quad y = Ae^{3x} + Be^{-5x}$$

$$(3) \quad y = Ae^{-2x} + Be^{-5x} \quad (4) \quad y = Ae^{3x} + Be^{5x}$$

حل: گزینه ۲ درست است. معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم.

$$r^2 + 2r - 15 = 0 \Rightarrow r = 3 \text{ و } -5 \Rightarrow y = Ae^{3x} + Be^{-5x}$$

۴. جواب عمومی معادله دیفرانسیل رتبه دو $\frac{d^2 u}{dx^2} + 5\frac{du}{dx} + 6u = 0$ معادل کدام یک از گزینه‌های می‌باشد؟ (پلیمر - آزاد ۸۱، هواشناسی - آزاد ۸۲)

$$(1) \quad u(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-2x} \quad (2) \quad u(x) = c_1 e^{-2x} + c_2$$

$$(3) \quad u(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x} \quad (4) \quad u(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x}$$

حل: گزینه ۱ درست است. معادله مشخصه عبارت است از:

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \Rightarrow r = -2 \text{ و } -3 \Rightarrow u = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$$

۵. جواب عمومی معادله $y'' - 8y' + 16y = 0$ کدام است؟ (هوافضا - آزاد ۷۷، مکانیک - آزاد ۸۲)

$$(1) \quad y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x} \quad (2) \quad y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$$

$$(3) \quad y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} \quad (4) \quad y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

حل: گزینه ۲ درست است. معادله مشخصه دارای ریشه تکراری است.

$$r^2 - 8r + 16 = 0 \Rightarrow r = 4 \text{ و } 4 \Rightarrow y = c_1 e^{4x} + c_2 x e^{4x}$$

۶. جواب معادله دیفرانسیل $y'' - 6y' + 9y = 0$ را به دست آورید. (هواشناسی - آزاد ۸۲)

$$(1) \quad y = ae^{2x} + bxe^{2x} \quad (2) \quad y = ae^{-2x} + be^{2x}$$

$$(3) \quad y = ae^{-2x} + bxe^{-2x} \quad (4) \quad y = axe^{2x} + bxe^{-2x}$$

حل: گزینه ۱ درست است. معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم.

۳۳. جواب معادله دیفرانسیل $y'' - 3y' + 5y = 0$ عبارت است از: (هسته‌ای - آزاد ۷۸)

$$y = e^{\frac{3}{2}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + B \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x \right) \quad (۲) \quad y = e^{\frac{3}{2}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{12}}{2}x + B \sin \frac{\sqrt{12}}{2}x \right) \quad (۱)$$

$$y = e^{\frac{3}{2}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + B \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x \right) \quad (۴) \quad y = \left(A \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + B \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x \right) \quad (۳)$$

حل: گزینه ۴ درست است. معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم.

$$r^2 - 3r + 5 = 0 \Rightarrow r = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{11}}{2}i \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \text{ و } \beta = \frac{\sqrt{11}}{2}$$

$$\Rightarrow y = e^{\frac{3}{2}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{11}}{2}x + B \sin \frac{\sqrt{11}}{2}x \right)$$

۳۴. جواب عمومی معادله دیفرانسیل $y'' + 3y' + 4y = 0$ عبارتست از: (عمران ۷۴)

$$y = c_1 e^{-\frac{3}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{3}{2}x} \quad (۲) \quad y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^x \quad (۱)$$

$$y = e^{-\frac{3}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{5}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{5}}{2}x \right) \quad (۴) \quad y = c_1 e^x \cos \frac{\sqrt{2}}{2}x + c_2 e^{-x} \quad (۳)$$

حل: گزینه ۴ درست است. معادله مشخصه عبارت است از:

$$r^2 + 3r + 4 = 0 \Rightarrow r = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}i \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2} \text{ و } \beta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\Rightarrow y = e^{-\frac{3}{2}x} \left(c_1 \cos \frac{\sqrt{5}}{2}x + c_2 \sin \frac{\sqrt{5}}{2}x \right)$$

۳۵. جواب عمومی معادله $y'' + \lambda^2 y = 0$ کدام است؟ (شیمی نساجی - آزاد ۸۱)

$$y = Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x} \quad (۲) \quad y = Ae^{-\lambda x} + Be^{\lambda x} \quad (۱)$$

$$y = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) \quad (۴) \quad y = A \cosh(\lambda x) + B \sinh(\lambda x) \quad (۳)$$

حل: گزینه ۴ درست است. معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم.

$$r^2 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow r^2 = -\lambda^2 \Rightarrow r = \pm \lambda \sqrt{-1} = \pm \lambda i \Rightarrow \alpha = 0 \text{ و } \beta = \lambda$$

$$\Rightarrow y = e^{0x} (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$$

معادلات همگن با ضرایب غیر ثابت (معادلات همگن با ضرایب متغیرکوشی اویلر)

تست ۱۱: جواب معادله $x^2 y'' + xy' - 4y = 0$ کدام است؟

$$y = c_1 x + c_2 x^4 \quad (۴)$$

$$y = c_1 x^2 + \frac{c_2}{x^2} \quad (۳)$$

$$y = c_1 x^{2x} + \frac{c_2}{x^2} \quad (۲)$$

$$y = c_1 x^{-1} + \frac{c_2}{x^4} \quad (۱)$$

۲-۱-۱-۲- یافتن پایه‌های جواب برای معادلات همگن با ضرایب متغیر کوشی اویلر

معادله کوشی اویلر همگن به صورت مقابل می‌باشد:

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0 \quad (*)$$

برای یافتن پایه‌های جواب معادله کوشی اویلر (*), روال زیر را اجرا می‌کنیم:

ابتدا معادله مشخصه مربوط به معادله کوشی اویلر را تشکیل می‌دهیم. برای این کار تبدیل $y \rightarrow 1$ و $xy' \rightarrow m$ و $x^2 y'' \rightarrow m(m-1)$ را اعمال می‌کنیم. بنابراین:

$$am(m-1) + bm + c = 0 \Rightarrow am^2 + (b-a)m + c = 0$$

معادله مشخصه برای معادله کوشی اویلر:

(الف) اگر معادله مشخصه فوق دو ریشه حقیقی m_1 و m_2 داشته باشد، آنگاه پایه‌های جواب عبارتند از:

$$y_1 = x^{m_1}, y_2 = x^{m_2}$$

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} \quad \text{جواب عمومی}$$

(ب) اگر معادله مشخصه فوق ریشه مضاعف m_1 داشته باشد، آنگاه پایه‌های جواب عبارتند از:

$$y_1 = x^{m_1}, y_2 = x^{m_1} \ln x$$

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x \quad \text{جواب عمومی}$$

(ج) اگر معادله مشخصه فوق دو ریشه موهومی $\alpha \pm i\beta$ داشته باشد، آنگاه پایه‌های جواب معادله کوشی عبارتند از:

$$y_1 = x^\alpha \sin(\beta \ln x), y_2 = x^\alpha \cos(\beta \ln x)$$

$$y = x^\alpha [c_1 \sin(\beta \ln x) + c_2 \cos(\beta \ln x)] \quad \text{جواب عمومی}$$

(نمای ۸۷)

تست ۱۲: یک جواب معادله $x^2 y'' + xy' + y = 0$ برابر است با:

$$y = \cos(\ln x) \quad (۴)$$

$$y = \ln x \quad (۳)$$

$$y = \cos x \quad (۲)$$

$$y = \sin x \quad (۱)$$

حل: معادله مذکور از نوع کوشی اویلر بوده و دارای معادله مشخصه زیر است:

$$m(m-1) + m + 1 = 0 \Rightarrow m^2 + 1 = 0 \Rightarrow m = \pm i$$

$$y = c_1 \cos \ln x + c_2 \sin \ln x$$

پس جواب عمومی آن عبارت است از:

با قرار دادن $c_1 = 1$ و $c_2 = 0$ به گزینه چهارم می‌رسیم.

(مدیریت نمای ۸۷)

تست ۱۳: جواب عمومی معادله $x^2 y'' + 2xy' + \frac{1}{x}y = 0$ برابر است با:

$$(c_1 + c_2 \ln x) x^{-\frac{1}{x}} \quad (۴)$$

$$c_1 x^{-\frac{1}{x}} + c_2 \ln x \quad (۳)$$

$$(c_1 + c_2 x^{-\frac{1}{x}}) \quad (۲)$$

$$c_1 x^{-\frac{1}{x}} + c_2 x^{-\frac{1}{x}} \ln x \quad (۱)$$

حل: این معادله دیفرانسیل از نوع کوشی اویلر بوده و دارای معادله مشخصه زیر است:

$$m(m-1) + 2m + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow m^2 + m + \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow (m + \frac{1}{x})^2 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{x}, -\frac{1}{x}$$

$$y = c_1 x^{-\frac{1}{x}} + c_2 x^{-\frac{1}{x}} \ln x$$

پس جواب عمومی عبارت است از:

بنابراین، گزینه (۱) صحیح است.

حل:

۱۰۶. کدام یک از توابع زیر جواب عمومی معادله دیفرانسیل $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$ می باشد؟ (ریاضی ۷۷)

$$y = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad (۲) \quad y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} \quad (۱)$$

$$y = c_1 x^2 + c_2 x \quad (۴) \quad y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-1} \quad (۳)$$

حل: گزینه ۳ درست است. معادله مشخصه را تشکیل می دهیم.

$$r(r-1) + 4r + 2 = 0 \Rightarrow r^2 + 3r + 2 = 0 \Rightarrow r = -1 \text{ و } -2 \Rightarrow y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-1}$$

۱۰۷. جواب عمومی معادله $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$ عبارت است از: (هسته ای - آزاد ۸۱، سیستم - آزاد ۸۲)

$$y = c_1 x^3 + c_2 x^2 \quad (۱) \quad y = c_1 x^2 + c_2 x^{-2} \quad (۲) \quad y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-1} \quad (۳) \quad y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \quad (۴)$$

حل: گزینه ۳ درست است. معادله مشخصه عبارت است از:

$$r(r-1) + 2r - 6 = 0 \Rightarrow r^2 + r - 6 = 0 \Rightarrow r = -3 \text{ و } 2 \Rightarrow y = c_1 x^{-3} + c_2 x^2$$

۱۰۸. کدام گزینه جواب معادله دیفرانسیل مرتبه دوم $x^2 y'' + 6xy' + 6y = 0$ است؟ (صنایع رنگ ۸۱)

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^3 \quad (۱) \quad y = c_1 x^{-2} + c_2 x^3 \quad (۲) \quad y = c_1 x^2 + c_2 x^{-3} \quad (۳) \quad y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3} \quad (۴)$$

حل: گزینه ۴ درست است. معادله مشخصه عبارت است از:

$$r(r-1) + 6r + 6 = 0 \Rightarrow r^2 + 5r + 6 = 0 \Rightarrow r = -2 \text{ و } -3 \Rightarrow y = c_1 x^{-2} + c_2 x^{-3}$$

۱۰۹. جواب عمومی معادله مرتبه دوم $x^2 y'' + xy' - y = 0$ کدام است؟ (مخازن هیدروکربوری ۸۲)

$$y = c_1 x + c_2 \frac{1}{x} \quad (۱) \quad y = c_1 x + c_2 \ln x \quad (۲)$$

$$y = c_1 \sinh x + c_2 \cosh x \quad (۳) \quad y = c_1 \sin x + c_2 \cos x \quad (۴)$$

حل: گزینه ۱ درست است. معادله مشخصه عبارت است از:

$$r(r-1) + r + 1 = 0 \Rightarrow r^2 - 1 = 0 \Rightarrow r = \pm 1 \Rightarrow y = c_1 x + c_2 x^{-1}$$

۱۱۰. جواب معادله $2x^2 y'' - 3xy' - 3y = 0$ برابر است با: (هواشناسی - آزاد ۷۹)

$$y = 4x^{-\frac{1}{2}} + 22x^2 \quad (۴) \quad y = 4x^{-1} + 22x^2 \quad (۳) \quad y = 4x^{-\frac{1}{2}} + 32x^2 \quad (۲) \quad y = 4x^{-2} + 22x^2 \quad (۱)$$

حل: گزینه ۲ درست است. معادله مشخصه عبارت است از:

$$2r(r-1) - 3r - 3 = 0 \Rightarrow r^2 - \frac{5}{2}r - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow r = -\frac{1}{2} \text{ و } 3 \Rightarrow y = c_1 x^{-\frac{1}{2}} + c_2 x^3$$

و با انتخاب $c_1 = 4$ و $c_2 = 32$ گزینه (۲) حاصل می شود.

۱۱۱. جواب کلی معادله دیفرانسیل $4x^2 y'' + 4xy' - y = 0$ در صورتی که یک جواب خصوصی آن $y = x^c$

(عدد ثابت است) باشد، کدام است؟ (مهندسی پزشکی - آزاد ۷۸)

$$y = c_1 x + c_2 x^2 \quad (۱) \quad y = c_1 x - c_2 x^2 \quad (۲) \quad y = c_1 \sqrt{x} + c_2 \frac{\sqrt{x}}{x} \quad (۳) \quad y = c_1 x - c_2 \sqrt{x} \quad (۴)$$

حل: گزینه ۳ درست است. معادله مشخصه عبارت است از:

$$4r(r-1) + 4r - 1 = 0 \Rightarrow r^2 - \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow r = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow y = c_1 x^{\frac{1}{2}} + c_2 x^{-\frac{1}{2}} = c_1 \sqrt{x} + c_2 \frac{\sqrt{x}}{x}$$

۱۱۲. جواب معادله دیفرانسیل $x^2 y'' - xy' + y = 0$ کدام است؟

(مخازن هیدروکربوری ۷۸، مکانیک ماشین‌های کشاورزی ۸۱)

$$y = c_1 x + c_2 x^2 \ln x \quad (2) \quad y = c_1 x + c_2 x \ln x \quad (1)$$

$$y = c_1 x^2 + c_2 x \ln x \quad (4) \quad y = c_1 x \sin x + c_2 x \ln x \quad (3)$$

حل: گزینه ۱ درست است. معادله مشخصه عبارت است از:

$$r(r-1) - r + 1 = 0 \Rightarrow r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1 \text{ و } 1 \Rightarrow y = c_1 x + c_2 x \ln x$$

۱۱۳. جواب عمومی معادله $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$ عبارت است از:

(آبیاری وزه‌کشی - آزاد ۷۷، نقشه‌برداری ۸۰، پلیمر - آزاد ۸۱، هواشناسی - آزاد ۸۲)

$$y = cx^2 \quad (2) \quad y = (c_1 + c_2 \ln x)x^2 \quad (1)$$

$$y = c_1 x^2 + c_2 \ln x \quad (4) \quad y = cx^2 \ln x \quad (3)$$

حل: گزینه ۱ درست است. معادله مشخصه عبارت است از:

$$r(r-1) - 3r + 4 = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow r = 2 \text{ و } 2$$

$$\Rightarrow y = c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x = (c_1 + c_2 \ln x)x^2$$

۱۱۴. حل عمومی معادله دیفرانسیل $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + y = 0$ کدام است؟ (عمران - آزاد ۷۸، معدن ۸۱)

$$y = \frac{A + B \ln x}{x} \quad (4) \quad y = A \frac{\ln x}{x} \quad (3) \quad y = \frac{A}{x} \quad (2) \quad y = A + B \ln x \quad (1)$$

حل: گزینه ۴ درست است. معادله مشخصه عبارت است از:

$$r(r-1) + 3r + 1 = 0 \Rightarrow r^2 + 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = -1 \text{ و } -1$$

$$\Rightarrow y = x^{-1}(A + B \ln x) = \frac{A + B \ln x}{x}$$

۱۱۵. $L(x)$ و $q(x)$ را به گونه‌ای تعیین کنید که $y_1 = \sqrt{x}$ و $y_2 = \frac{1}{\sqrt{x}}$ دو جواب مستقل برای معادله

دیفرانسیل $y'' + L(x)y' + q(x)y = 0$ باشد. (مکانیک ۷۵، علوم دریایی ۸۱)

$$q(x) = -\frac{1}{4}x^{-2} \text{ و } L(x) = x^{-1} \quad (1) \quad q(x) = x^{-2} \text{ و } L(x) = x \quad (2)$$

$$q(x) = x^{-1} \text{ و } L(x) = x^{-2} \quad (3) \quad q(x) = -x^{-2} \text{ و } L(x) = 5x^{-1} \quad (4)$$

حل: گزینه ۱ درست است. $x^{\frac{1}{2}}$ و $x^{-\frac{1}{2}}$ جواب‌های یک معادله کوشی اوپلر هستند که $r = \pm \frac{1}{2}$ ریشه‌های معادله

شاخص آن باشند. اگر معادله را $x^2 y'' + ax + by = 0$ فرض کنیم، معادله مشخصه $r^2 + (a-1)r + b = 0$ است.

$$\begin{cases} 0 = \text{جمع ریشه‌ها} = -(a-1) \Rightarrow a = 1 \\ -\frac{1}{4} = \text{ضرب ریشه‌ها} = b \Rightarrow b = -\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow x^2 y'' + xy' - \frac{1}{4}y = 0$$

$$\Rightarrow y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{4}x^{-2}y = 0 \Rightarrow L(x) = x^{-1} \text{ و } q(x) = -\frac{1}{4}x^{-2}$$

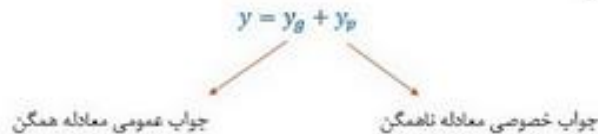
سه بیان از سه کتاب مربوط به بحث جواب عمومی و خصوصی در معادلات غیر همگن

حل معادلات مرتبه دوم

به هر معادله به فرم $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ می‌گویند. اگر $R(x)$ صفر نباشد، معادله را همگن و در غیر اینصورت آنرا ناهمگن گویند.

تذکره اصلی:

جواب عمومی معادله خطی مرتبه دوم ناهمگن $y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$ برابر است با مجموع جواب‌های عمومی معادله همگن و یک جواب خصوصی معادله ناهمگن.



۲-۱-۲- معادلات مرتبه دوم ناهمگن و روش‌های یافتن جواب خصوصی

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم ناهمگن به صورت مقابل می‌باشند:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = R(x)$$

تذکره: اگر تابع $y_p(x)$ جوابی از معادله فوق بوده و $y_h(x)$ جواب عمومی معادله دیفرانسیل همگن متناظر با آن (یعنی $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$) باشد، می‌توان ثابت کرد که جواب عمومی معادله فوق عبارت است از:

$$y = y_h(x) + y_p(x)$$

در این صورت y_p را جواب خصوصی معادله دیفرانسیل می‌نامیم و در آینده نزدیک، روش‌هایی برای یافتن آن می‌آموزیم.

مثال: اگر $\sin x$ جواب خصوصی معادله $y'' + 2y = f(x)$ باشد، جواب عمومی این معادله را پیدا کنید.

پاسخ: ابتدا معادله همگن نظیر را حل می‌کنیم:

$$y'' + 2y = 0 \Rightarrow m^2 + 2 = 0 \Rightarrow m = \pm \sqrt{2}i \Rightarrow y_h = c_1 \sin \sqrt{2}x + c_2 \cos \sqrt{2}x$$

جواب معادله دیفرانسیل ناهمگن از جمع جواب خصوصی و جواب همگن نظیر پیدا می‌شود:

$$y = y_h + y_p = c_1 \sin \sqrt{2}x + c_2 \cos \sqrt{2}x + \sin x$$

در مبحث بعد روش‌های به‌دست آوردن جواب خصوصی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

معادلات خطی غیر همگن مرتبه دوم

صورت کلی این معادلات به فرم زیر می‌باشد.

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x)$$

$f_1(x)$ و $f_2(x)$ را ضرایب می‌نامند.

تذکره

جواب عمومی معادله $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x)$ به فرم مجموع دو جواب $y_p(x)$ ، $y_h(x)$ می‌باشد که $y_h(x)$ جواب عمومی معادله همگن متناظر یعنی

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = 0$$

است و y_p یک جواب ساده بدون پارامتر، معادله $y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = f_3(x)$ می‌باشد. در نتیجه جواب عمومی معادله دیفرانسیل غیر همگن مرتبه دوم به فرم زیر است.

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

مثال ۱ نشان دهید $y_p = e^x$ یک جواب معادله دیفرانسیل

$$y'' + y = 2e^x \quad (a)$$

می باشد و سپس جواب عمومی معادله (a) را بنویسید.

حل: باید y_p و مشتق دوم y_p را در معادله (a) گذاشت و نشان داد که اتحاد برقرار است.

$$y_p'' = e^x, \quad y_p = e^x \quad (b)$$

(b) را در (a) می گذاریم، $e^x + e^x = 2e^x$. برای بدست آوردن جواب عمومی (a)، باید جواب عمومی معادله همگن متناظر را پیدا کنیم.

$$y'' + y = 0 \quad (c)$$

برای حل (c)، معادله مفسر را تشکیل می دهیم و ریشه های آن را حساب می کنیم

$$t^2 + 1 = 0 \Rightarrow t = \pm i$$

و

$$y_h(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

و جواب عمومی (a) عبارت است از:

$$\square \quad y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + e^x$$

جواب خصوصی معادلات غیر همگن را چگونه پیدا کنیم؟

ایده اصلی در این روش آن است که جواب خصوصی معادله مذکور، از سنخ جمله ناهمگن معادله (یعنی $R(x)$) است. بدین معنی که اگر جمله ناهمگن معادله، مثلاً به صورت نمایی باشد، جواب خصوصی هم نمایی بوده و یا اگر جمله ناهمگن چندجمله ای است، جواب خصوصی هم چندجمله ای خواهد بود.

بنابراین برای یافتن جواب خصوصی مراحل زیر را اجرا می کنیم:

الف) ابتدا معادله دیفرانسیل همگن نظیر را تشکیل داده و پایه های جواب آن را پیدا می کنیم.

ب) سپس شکل کلی و کامل شده $R(x)$ را به عنوان جواب خصوصی حدس می زنیم. (حدس اولیه)

به عنوان مثال:

- اگر $R(x)$ به صورت یک چندجمله ای از درجه k برای x باشد، جواب خصوصی نیز یک چندجمله ای (شامل تمام توان های x) از درجه k خواهد بود. مثلاً اگر $R(x) = x^2$ باشد، آنگاه داریم: $y_p = Ax^2 + Bx + C$ (ضرایب ثابت A, B و C با قرار دادن این جواب در معادله دیفرانسیل اصلی به دست می آیند).

- اگر $R(x)$ به صورت نمایی باشد، جواب خصوصی نیز نمایی خواهد بود. مثلاً اگر $R(x) = e^{\alpha x}$ ، آنگاه داریم: $y_p = Ae^{\alpha x}$

- اگر $R(x)$ به صورت سینوسی (یا کسینوسی) $R(x) = \sin \beta x$ باشد، جواب خصوصی نیز سینوسی و کسینوسی خواهد بود. یعنی داریم:

$$y_p = A \sin \beta x + B \cos \beta x$$

آنها باشد) ضروری می باشد؛ زیرا این جملات با مشتق گیری به یکدیگر تبدیل می شوند.

- و اگر چنانچه $R(x)$ به صورت حاصل ضرب جملات نمایی، چندجمله ای و سینوسی باشد، جواب خصوصی نیز به همان صورت خواهد بود.

مثال ۱

پاسخ خصوصی معادله زیر را بیابید.

$$y'' - 4y' - 12y = 3e^{5t}$$

روش ضرایب نامعین در یافتن پاسخ خصوصی

در بالا شکل کلی معادله و شکل کلی پاسخ یک معادله ناهمگن را توضیح دادیم. توجه داشته باشید که پاسخ عمومی را می‌توان با استفاده از روش‌های بیان شده در مطالب معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و معادلات دیفرانسیل بدست آورد. بنابراین به منظور حل یک معادله ناهمگن، چالش اصلی یافتن پاسخ خصوصی است.

در این قسمت قصد داریم تا روش ضرایب نامعین را در بدست آوردن پاسخ خصوصی یک معادله دیفرانسیل ناهمگن مرتبه دوم توضیح دهیم. مهم‌ترین مزیت این روش کاهش معادله به معادله‌ای جبری است. فرض کنید می‌خواهیم معادله ناهمگن زیر را حل کنیم.

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$$

تمام چیزی که نیاز است، توجه کردن به تابع $g(t)$ و حدس زدن پاسخ خصوصی است. پاسخ خصوصی حدس زده شده، ضرایب ثابتی را در خود دارد که می‌توان با جایگذاری آن در معادله دیفرانسیل، آن‌ها را بدست آورد.

با توجه به شکل $g(t)$ ، پاسخ خصوصی را می‌توان به صورت زیر تصور کرد.

$$Y_p(t) = Ae^{5t}$$

حال کافی است تا پاسخ در نظر گرفته شده را در معادله اصلی جایگذاری کرده و ضریب A را بدست آورد. بنابراین با جایگذاری پاسخ فوق داریم:

$$25Ae^{5t} - 4(5Ae^{5t}) - 12(Ae^{5t}) = 3e^{5t}$$

$$-7Ae^{5t} = 3e^{5t}$$

از معادله فوق مقدار A به صورت زیر بدست می‌آید.

$$-7A = 3 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{3}{7}$$

بنابراین پاسخ خصوصی معادله برابر با تابع زیر است.

$$Y_p(t) = -\frac{3}{7}e^{5t}$$

حال روش بدست آوردن جواب خصوصی $y_p(x)$ را بررسی می‌کنیم. این روش موسوم به روش ضرایب نامعین است. از این روش فقط در مورد معادلات خطی با ضرایب ثابت می‌توان استفاده کرد.

تست ۱۰: یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' + 4y' + 4y = xe^{-2x}$ برابر است با: (ریاضی ۸۲)

$$y_p = (A_0 + A_1x)e^{-2x} \quad (۲) \quad y_p = x(A_0 + A_1x)e^{-2x} \quad (۱)$$

$$y_p = A_1xe^{-2x} \quad (۴) \quad y_p = x^2(A_0 + A_1x)e^{-2x} \quad (۳)$$

$$y'' + f_1(x)y' + f_2(x)y = f(x)$$

حالت ۱: اگر $f(x)$ حاصل ضرب یک چندجمله‌ای از درجه k در عبارت نمایی یعنی به صورت $f(x) = M(x)e^{rx}$ باشد جواب خصوصی به صورت:

$$y = x^s \cdot e^{rx} \cdot N(x)$$

است که در آن $N(x)$ چندجمله‌ای از درجه k (برابر با درجه M) و s مرتبه تکرر r در چندجمله‌ای مشخصه معادله همگن است.

نکته ۱. اگر $f(x)$ یک چندجمله‌ای باشد، در حالت (۱) کافی است $r = 0$ در نظر گرفته شود.
مثال: فرم جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را بنویسید.

$$y'' - 4y' + 4y = 5e^{2x}$$

حل: ابتدا جواب عمومی معادله دیفرانسیل را می‌یابیم

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 2$$

چون p ، دو بار ریشه معادله مقسوم می‌باشد، پس باید y_p را به صورت زیر انتخاب کنیم.

$$y_p = Ax^2 e^{2x}$$

مثال: فرم جواب خصوصی معادله دیفرانسیل زیر را بنویسید.

$$y''' - 2y'' = x^3 + 1$$

حل: ابتدا جواب عمومی معادله دیفرانسیل را می‌یابیم

$$y''' - 2y'' = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 2 \end{cases}$$

چون صفر، صفر دو بار، ریشه معادله مقسوم می‌باشد پس داریم:

$$y_p = x^2 (Ax^3 + Bx^2 + Cx + D)$$

حل: گزینه ۳ درست است. ریشه‌های معادله مشخصه را به دست می‌آوریم.

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r + 2)^2 = 0 \Rightarrow r = -2 \text{ و } -2$$

طرف دوم ضرب چندجمله‌ای درجه اول در عبارت نمایی است و چون $r = -2$ دوبار در چندجمله‌ای مشخصه ظاهر می‌شود، گزینه (۳) بدست می‌آید.

تست ۵. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y'' + 6y' + 13y = e^{-x} \cos 2x$ برابر است با: (ریاضی ۸۲)

$$y_p = e^{-x}(A \cos 2x + B \sin 2x) \quad (۱) \quad y_p = e^{-x}(Ax \cos 2x + Bx \sin 2x) \quad (۲)$$

$$y_p = e^{-x}(Ax^2 \cos 2x + Bx^2 \sin 2x) \quad (۴) \quad y_p = e^{-x}(Ax \cos 2x) \quad (۳)$$

حالت ۲. اگر $f(x)$ حاصل ضرب یک چندجمله‌ای از درجه k در عبارت نمایی در $\sin$ یا $\cos$ باشد یعنی

$$f(x) = M(x)e^{\alpha x} \sin \beta x \quad \text{و} \quad f(x) = M(x)e^{\alpha x} \cos \beta x$$

جواب خصوصی عبارت است از:

$$y_p = x^s \cdot e^{\alpha x} (N_1(x) \sin \beta x + N_2(x) \cos \beta x)$$

که در آن N_1, N_2 دو چندجمله‌ای از درجه k و همچنین s مرتبه تکرار $\alpha \pm i\beta$ در چندجمله‌ای مشخصه است.

تذکره. اگر $f(x)$ فقط شامل $\sin$ یا فقط شامل $\cos$ باشد، در عبارت y_p باید هر دو جمله $\sin$ یا $\cos$ نوشته شوند زیرا $\sin$ و $\cos$ در مشتق‌گیری به یکدیگر تبدیل می‌شوند.

مثال حل شده

$$5) y'' + 2y' + 5y = e^{-x} \{2 \sin 2x + 2 \cos 2x\}$$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1 + 2i; \lambda_2 = -1 - 2i$$

$$y_p(x) = x^1 e^{-x} \{A \sin 2x + B \cos 2x\}$$

$$6) y^{(4)} + 2y'' + y = x \sin x$$

حل: ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم:

$$\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow (\lambda^2 + 1)^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = +i; \lambda_2 = -i; \lambda_3 = +i; \lambda_4 = -i$$

$$y_p(x) = x^2 \cdot e^{0x} \{(Ax + B) \sin x + (Cx + D) \cos x\}$$

حل: گزینه ۱ درست است. معادله مشخصه $r^2 + 6r + 13 = 0$ است پس:

$$r = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 52}}{2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i$$

چون $e^{-x} \cos 2x$ متناظر $r = -3 \pm 2i$ است که یک‌بار در چندجمله‌ای مشخصه ظاهر می‌شود.

$$y_p = x e^{-x} (A \cos 2x + B \sin 2x)$$

تست ۲

جواب ویژه (خاص) معادله دیفرانسیل زیر مطابق کدام یک از گزینه‌ها می‌باشد؟

(پلیمر، صنایع رنگ - آزاد ۸۲)

$$y''' - 3y'' + 3y' = x$$

$$y_p = (c_1 \ln x + c_2) e^x \quad (۲)$$

$$y_p = \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{3} x \quad (۱)$$

$$y_p = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \ln x \quad (۴)$$

$$y_p = x^2 + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{3} x \quad (۳)$$

حل: گزینه ۱ درست است. معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم.

$$r^3 - 3r^2 + 3r = 0 \implies r(r^2 - 3r + 3) = 0 \implies r = 0 \text{ و } r^2 - 3r + 3 = 0$$

طرف دوم معادله $f(x) = x$ متناظر $r = 0$ است که چون $r = 0$ جواب معادله دوم نیست، یک‌بار در معادله مشخصه ظاهر می‌شود. پس $y_p = x(ax + b) = ax^2 + bx$ است و لذا با توجه به گزینه‌ها، (۱) درست است.

برای محاسبه a و b باید y_p را در معادله جایگذاری کنیم.

۱. عدد مثبت و صحیح n را طوری به دست آورید که معادله $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ دارای جواب مخصوص $y_p = Ax^n e^{2x}$ باشد.

(معماری کشتی ۷۸)

$$۵ \quad (۴)$$

$$۴ \quad (۳)$$

$$۱ \quad (۲)$$

$$۲ \quad (۱)$$

حل: گزینه ۱ درست است. چون طرف دوم نمایی است، حدس $Ax^n e^{2x}$ است که n مرتبه تکرار $r = 2$ در چندجمله‌ای مشخصه است. چندجمله‌ای مشخصه $r^2 - 4r + 4 = 0$ دارای ریشه $r = 2, 2$ است پس $r = 2$ دوبار تکرار می‌شود و لذا $n = 2$.

(ریاضی ۸۱)

۲. جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $y''' + 3y'' + 3y' + y = xe^{-x}$ کدام است؟

$$y_p = (Ax + B)x^2 e^{-x} \quad (۲)$$

$$y_p = Ax^4 e^{-x} \quad (۱)$$

$$y_p = (Ax + B)x^3 e^{-x} \quad (۴)$$

$$y_p = (Ax + B)x^2 e^{-x} \quad (۳)$$

حل: گزینه ۲ درست است. ریشه‌های معادله مشخصه را به دست می‌آوریم.

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0 \implies (r + 1)^3 = 0 \implies r = -1 \text{ و } -1 \text{ و } -1$$

چون xe^{-x} ضرب چندجمله‌ای درجه یک در نمایی است و $r = -1$ سه بار در معادله مشخصه ظاهر می‌شود:

$$y_p = (Ax + B)x^3 e^{-x}$$

(مواد - آزاد ۷۸)

۳. جواب خصوصی معادله $y'' + y = \sin x$ به کدام یک از صورت‌های زیر است؟

$$y = a \cos x + b \sin x \quad (۲)$$

$$y = a \sin x \quad (۱)$$

$$y = x(a \cos x + b \sin x) \quad (۴)$$

$$y = a \cos x \quad (۳)$$

حل: گزینه ۴ درست است. معادله مشخصه $r^2 + 1 = 0$ دارای ریشه‌های $\pm i$ است. طرف دوم $\sin x$ متناظر

$r = \pm i$ است که چون یک‌بار در معادله مشخصه ظاهر می‌شود، پس $y_p = x(a \cos x + b \sin x)$.

تست ۱

شکل کلی پیشنهادی یک جواب خصوصی معادله دیفرانسیل $\frac{d^4 y}{dx^4} + 2 \frac{d^2 y}{dx^2} + y = x \cos x$ عبارت است از:

(برق ۷۷)

$$y_p(x) = x^2(A_1 x + A_2) \cos x \quad (۱)$$

$$y_p(x) = x^2(A_1 x + A_2) \cos x + x^2(B_1 x + B_2) \sin x \quad (۲)$$

$$y_p(x) = x(A_1 x + A_2) \cos x + x(B_1 x + B_2) \sin x \quad (۳)$$

$$y_p(x) = (A_1 x + A_2) \cos x + (B_1 x + B_2) \sin x \quad (۴)$$

حل: گزینه ۲ درست است. معادله مشخصه عبارت است از:

$$r^4 + 2r^2 + 1 = 0 \implies (r^2 + 1)^2 = 0 \implies r = \pm i \text{ و } \pm i$$

طرف دوم معادله $\cos x$ ، متناظر $\pm i$ است که دوبار در چندجمله‌ای مشخصه ظاهر می‌شود. پس:

$$y_p(x) = x^2((A_1 x + A_2) \cos x + (B_1 x + B_2) \sin x)$$

تست ۲

جواب ویژه (خاص) معادله دیفرانسیل زیر مطابق کدام یک از گزینه‌ها می‌باشد؟

(پلیمر، صنایع رنگ - آزاد ۸۲)

$$y''' - 3y'' + 3y' = x$$

$$y_p = (c_1 \ln x + c_2) e^x \quad (۲)$$

$$y_p = \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{3} x \quad (۱)$$

$$y_p = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \ln x \quad (۴)$$

$$y_p = x^2 + \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{3} x \quad (۳)$$

حل: گزینه ۱ درست است. معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم.

$$r^3 - 3r^2 + 3r = 0 \implies r(r^2 - 3r + 3) = 0 \implies r = 0 \text{ و } r^2 - 3r + 3 = 0$$

طرف دوم معادله $f(x) = x$ متناظر $r = 0$ است که چون $r = 0$ جواب معادله دوم نیست، یکبار در معادله

مشخصه ظاهر می‌شود. پس $y_p = x(ax + b) = ax^2 + bx$ است و لذا با توجه به گزینه‌ها، (۱) درست است.

برای محاسبه a و b باید y_p را در معادله جایگذاری کنیم.