

خطاها

برای تعیین جواب یا جوابهای یک مساله واقعی باید مدل ریاضی آن را بسازیم و پس از تعیین راه حلی مناسب برای رسیدن به جواب با انجام محاسبات لازم جواب را به دست آوریم. در این فرآیند خطاهایی پیش می آید که انواع متفاوتی دارند. آشنایی با این خطاها ونحوه بروز آنها وکنترل آنها موضوع این فصل است.

انواع خطاها:

خطای مدل: این خطا شامل صرفنظر کردن وچشم پوشی و ساده نویسی ها جهت تعیین مدل ریاضی مساله است پس باید تا آنجایی که میتوانیم شرایط واقعی را در مساله بیاوریم.

خطای داده: این خطا به هنگام اندازه گیری و برآورد مفروضات مساله پیش می آید. پس باید از وسایل اندازه گیری دقیقی استفاده کنیم .

خطای نمایش اعداد: نمایش اعشاری یا دودویی اکثر اعدادبا تعداد متناهی رقم امکان پذیر نیست از این روانتخاب تعداد متناهی از این ارقام سبب خطا میشود .

خطای اعمال حسابی: حاصل بعضی از اعمال بر دو عامل عددی دارای تعداد نامتناهی رقم است و انتخاب تعدادی متناهی از این ارقام سبب این خطا میگردد.

خطای روش: روش های عددی تکراری هستند و تقریبی از جواب دقیق را به دست می دهند دقت این تقریب به نوع روش و مرحله توقف آنها بستگی دارد.

گرد کردن در نمایش اعشاری: اگر رقمی که میخواهد حذف شود کمتر از 5 باشد بدون هیچ تغییری حذف میشود و اگر بزرگتر یا مساوی 5 باشد یکی به رقم قبلش اضافه میشود و حذف میگردد.

مثلا: $\sqrt{2} \approx 1/4142135624...$ اگر آن را تا جارجار رقم اعشار گرد کنیم: ابتدا نگاه به رقم پنجم بعد از اعشار میکنیم چون کمتر از پنج است پس بدون هیچ تغییری حذف میشود و داریم

$$\sqrt{2} \approx 1/4142$$

حال اگر آن را تا هفت رقم اعشار گرد کنیم چون رقم هشتم بزرگتر از پنج هست پس یکی به رقم قبلش اضافه و حذف میشود پس داریم

$$\sqrt{2} \approx 1/4142136$$

قضیه: اگر a تقریبی گرد شده A تا رقم n اعشار باشد حداکثر مقدار خطای گرد کردن برابر است با:

$$|A - a| \leq 5 \times 10^{-(n+1)} = \frac{1}{2} \times 10^{-n}$$

مثال: $\sqrt{2} \approx 1/4142$

$$|A - a| = \left| \sqrt{2} - 1/4142 \right| = 0.00001356238 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4}$$

بسط اعشاری اعداد:

منظور از بسط اعشاری یک عدد مثبت نمایش آن به شکل

$$a_m \times 10^m + a_{m-1} \times 10^{m-1} + \dots$$
$$a_m \neq 0, m \in \mathbb{Z}, 0 \leq a_i \leq 9$$

بسط فوق برای اعداد صحیح و اعشاری راحت است مثلاً:

$$2347 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 7 \times 10^0$$

$$37 / 409 = 3 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 9 \times 10^{-3}$$

بسط اعشاری: مختوم یا نامختوم که نامختوم دو حالت دارم یا نامختوم متناوب یا نامختوم نامتناوب
مثال: این دو مثال نامختوم متناوب است.

$$\frac{2}{3} = .6666666... = \overline{6}$$

$$\frac{22}{7} = 3.\overline{142858}$$

نامختوم نامتناوب است $\sqrt{2} = 1/414213562$

قضیه: اگر نمایش اعشاری عدد مختوم یا نامختوم متناوب باشد حتماً عدد گویاست.

عکس نقیض این قضیه نیز برقرار است یعنی اگر نمایش اعشاری نامختوم نامتناوب باشد عددگویا نیست .

نتیجه: اگر عددی گنگ باشد بسط اعشاری آن نامختوم و متناوب است.

یکی از مسایلی که در این قسمت مطرح میشود نوشتن کسر مساوی یک عدد اعشاری نامختوم و متناوب است نحوه بدست آوردن این در قضیه زیر آمده است

قضیه: اگر $A = a_1a_2...a_m / b_1b_2...b_nc_1...c_k$ باشد که $a_1a_2...a_m$ قسمت حقیقی و $b_1b_2...b_n$ قسمت اعشار $c_1...c_k$ و مرتبا تکرار میشود آنگاه:

$$A = a_1a_2...a_m + \frac{b_1b_2...b_nc_1...c_k - b_1b_2...b_n}{9999...900...0}$$

$$A = a_1a_2...a_m / b_1b_2...b_n + \frac{c_1...c_k}{10^n(10^k - 1)}$$

مثال: کسر مربوط به اعداد اعشاری زیر را بنویسید.

$$1) A = 3/0\overline{7} = 3/0 + \frac{7}{90} = \frac{277}{90} (m=1, n=1, k=1)$$

$$2) B = 15/23\overline{7} = 15 + \frac{237-2}{990} = \frac{3017}{198} (m=2, n=1, k=2)$$

تمرین: برای موارد 1 و 2 و 3 بسط اعشاری و برای 5 و 6 کسر مربوط به آن را

بنویسید:

$$1) \frac{3}{11}$$

$$2) \frac{23}{11}$$

$$3) \frac{1}{13}$$

$$4) 25/3\overline{2}$$

$$5) 0/00\overline{6}$$

بسط اعداد صحیح در مبنای 2:

یک روش تقسیمات متوالی و کنار هم گذاشتن باقیمانده هاست که با آن آشنا هستیم اما این روش قابل تعمیم به اعداد غیر صحیح نیست. اینجا روشی را ارائه می‌دهیم که قابل تعمیم به اعداد غیر صحیح نیز هست یعنی با استفاده از آن میتوان اعداد اعشاری را در مبنای 2 نیز به دست آورد.

مثال: عدد 39 را به مبنای 2 ببرید .

اگر 39 را بر 2 تقسیمات متوالی تا جایی که امکان دارد بکنیم و در آخر تمام باقیمانده ها و آخرین خارج قسمت (از آخر به اول) را کنار هم بزاریم به نتیجه زیر میرسیم.

(از آخر به اول) را کنار هم بزاریم به نتیجه زیر میرسیم.

$$39 = (100111)_2$$

حال میخواهیم روشی را ارائه دهیم که بسط هر عدد بین 0 و 1 را در مبنای 2 بدست آورد و به راحتی قابل تعمیم به تعیین بسط یک عدد حقیقی در مبنای 2 دلخواه باشد و از همه مهمتر این روش تکراری است و با طبیعت کامپیوتر به عنوان وسیله ای سریع برای انجام کارهای تکراری سازگار است .

برای این کار از الگوریتم زیر استفاده میکنیم :

پس الگوریتم زیر برای تعیین n رقم از بسط عدد A که $0 < A < 1$ در مبنای

2 داریم :

1- شروع کنید :

2- A, n را در نظر بگیرید

3- برای i از 1 تا n کار های زیر را انجام دهید

الف- $b \leftarrow [2A]$

ب- b را بنویس

ج- $A \leftarrow 2A - b$

د- اگر $A = 0$ عملیات را خاتمه بده

4- پایان

در واقع جدولی مانند زیر عملیات را انجام می‌دهیم تا جایی که عدد اولیه صفر شود یا تکرار شود .

n	A	$2A$	$b = [2A]$	$2A - b$
1				
2				
.				

مثال : عدد $\frac{3}{7}$ را در مبنای 2 ببرید .

n	A	2A	$b = [2A]$	2A-b
1	3/7	6/7	$\left[\frac{6}{7}\right] = [.85] = 0$	6/7
2	6/7	12/7	$\left[\frac{12}{7}\right] = 1$	5/7
3	5/7	10/7	$\left[\frac{10}{7}\right] = 1$	3/7
4	3/7			

چون در مرحله چهارم عدد اولیه تکرار شده پس عملیات را خاتمه می‌دهیم و عدد داده شده در مبنای 2 برابر است با:

$$\frac{3}{7} = (\overline{011})_2$$

تعریف جز صحیح: جز صحیح یک عدد برابر است با بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی آن عدد یعنی :

جز صحیح عدد در صورتی که قسمت حقیقی و قسمت اعشار باشد به صورت زیر بدست می آید .

$$[X / M] = X \quad (X \succ 0)$$

$$[X / M] = X - 1 \quad (X \prec 0)$$

$$[X] = X$$

مثال:

$$\lceil 3/2 \rceil = 3$$

$$\lfloor -3/2 \rfloor = -3 - 1 = -4$$

$$\lceil 3 \rceil = 3$$

تمرین: اعداد زیر را به مبنای 2 ببرید:

$$1-./1$$

$$2-37/2.$$

پس این الگوریتم برای نمایش اعداد در مبناهای مختلف است مثلاً برای مبنای 3 عدد A را در $3A$ ضرب میکنیم و....

تمرین: برنامه ای بنویسید که عدد A و r یک عدد طبیعی بزرگتر از یک را گرفته و A را در مبنای r نمایش دهد.

نمایش علمی اعداد: فرض کنید A عددی مخالف صفر باشد واضح است که همواره A را میتوان به صورت $A = a \times 10^b$ که در آن $1 \leq |a| < 10$ و b عددی صحیح میباشد نمایش داد در این نمایش a را مانیتیس و b را نمای عدد A می نامیم.

مثال:

$$2000 = 2/000 \times 10^3$$

$$/00726 = 7 / 26 \times 10^{-3}$$

$$-34 / 241 = -3 / 4241 \times 10^1$$

ارقام بامعنا: در ریاضیات اعداد زیر باهم مساویند

$$7/4, 7/40, 7/400$$

اما در علومی که با اندازه گیری سروکار دارند مانند فیزیک شیمی و... چنین نیست اگر طولی را اندازه بگیریم و نتیجه اندازه گیری $7/40$ متر باشد این بدان معنی است که وسیله اندازه گیری دقتی در حد سانتی متر دارد و اگر $7/400$ متر باشد یعنی دقتی در حد میلیمتر دارد از اینرو صفرهای جلوی عدد را که نشانه ی دقت اندازه گیری است صفرهای بامعنا میگوییم.

تعریف: اگر عددی اعشاری باشد و $1 \leq |a| < 10$ در این صورت ارقام بامعنا ی a ارقام مخالف صفر a ، صفرهای بین ارقام و صفرهای جلوی عدد که برای دقت عدد نمایش داده شده ارقام بامعنا ی a با A برابر است.

نکته: اگر به صورت نماد علمی نباشد یعنی $(0 \leq |a| < 10)$ اول نماد علمی آن را مینویسیم هر چقدر تعداد ارقام با معنا پیدا کرد همان ارقام با معنا ی a است .

مثال:

$$-4/240100 \quad 7 = \text{ارقام با معنا}$$

$$/006210800 = 6/210800 * 10^{-3} \quad 7 = \text{ارقام با معنا}$$

نکته: تعداد ارقام با معنا دقت عدد را مشخص نمیکند و تساوی تعداد ارقام با معنا دلیلی بر اینکه دقت یکسانی دارند نیست به همین خاطر ارقام با معنای درست را معرفی میکنیم مثلاً :

$$A=4/000$$

$$a=3/997$$

$$b=4/006$$

ارقام بامعنای a و b هم برابر است اما a بهتر و نزدیکتر به A است.

تعریف ارقام بامعنای درست: به تعداد ارقام بامعنایی که اگر a با آن تعداد ارقام با معنا گرد شود مقدار واقعی A بدست می آید.

تعریف ریاضی: اگر نمایش اعشاری به این صورت باشد

$$a = a_1 \times 10^m + a_2 \times 10^{m-1} + \dots$$

و دارای d رقم بامعنا نیز باشد به بزرگترین عدد صحیح نامنفی کوچکتر یا مساوی d که در رابطه زیر صدق کند تعداد ارقام بامعنای درست گویند.

$$|A - a| \leq 5 \times 10^{m-n}$$

مثال: اگر $A = 100, a = 99/98, b = 100/6$ تعداد ارقام بامعنای درست a, b را حساب کنید.

$$a = 99/98 = 9 \times 10^1 + 9 \times 10^0 + 9 \times 10^{-1} + 8 \times 10^{-2}$$

$$m = 1$$

$$|A - a| = |100 - 99/98| = /02 \leq 5 \times 10^{1-n}$$

$$n = 1 \rightarrow /02 < /5$$

$$n = 2 \rightarrow /02 < /05$$

$$n = 3 \rightarrow /02 < /005$$

بدیهی است که جواب 3 است پس دارای 3 رقم بامعنای درست است.

راه حل برای پیدا کردن :

پس برابر تعداد ارقام جز صحیح عدد منتهی یک در صورتی که $a \geq 1$

یعنی: $m = [a] - 1$

(+1 تعداد صفرهای بلافاصله بعد از ممیز) $m = -$ $0 < a < 1$

مثال:

$$m = /00241 \rightarrow m = -(2+1) = -3$$